# CALCOLO DIFFERENZIALE

## LEZIONE 1

(*)

**Def** (di spazio normato) [G. Def. 5.1 p. 26]

$X$ sp. vett.; $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ è una norma se

(i) $\|x\| = 0 \iff x = 0$

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \quad \forall x \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \ (\mathbb{C})$ omogeneità

(iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$ dis. triangolare

$(X, \|\cdot\|)$ spazio normato

(disegno $n=2$)

**Es.** (i) $\mathbb{R}^n \qquad \underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \qquad |\underline{x}| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$

(ii) $\mathbb{C}^n \qquad \underline{z} = (z_1, \dots, z_n) \qquad |\underline{z}| = (|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2)^{1/2}$

norme euclidee

**Ex.** Su $(X, \|\cdot\|)$ definiamo

$$d(x,y) := \|x-y\| \qquad \forall x, y \in X$$

Mostrare che $d$ è una distanza, detta distanza associata a $\|\cdot\|$.

**Ex.** $X$ sp. vett., $d$ distanza su $X$

$d$ è associata a una norma

$$\Updownarrow$$

(i) $d(x+z, y+z) = d(x,y) \qquad \forall x, y, z \in X$ inv. per trasl.

(ii) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \, d(x,y) \qquad \forall x, y \in X$ omogeneità

In tal caso $\|x\| = d(x, 0)$

Altre norme su $\mathbb{R}^n$

$$\|\underline{x}\|_1 := |x_1| + \dots + |x_n|$$

$$\|\underline{x}\|_\infty := \max\,(|x_1|, \dots, |x_n|)$$

(*) iniziare con questo

**Def.** $(X, d)$

$B(x,r) := \{y : \ d(y,x) < r\}$ sfera aperta di centro $x$ e raggio $r$

$\overline{B}(x,r) := \{y : \ d(y,x) \leq r\}$ sfera chiusa di centro $x$ e raggio $r$

$A$ è aperto se ...

**Ex.** Disegnare le sfere aperte di centro $0$ e raggio $1$ rispetto alle distanze indotte da $|\cdot|$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$ in $\mathbb{R}^2$

**Def.** Due norme su $\mathbb{R}^n$ si dicono equivalenti ~~se~~ $\exists\ c, C > 0$ t.c.

(*) $$c\,\|\underline{x}\|' \leq \|\underline{x}\| \leq C\,\|\underline{x}\|' \qquad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$$

**Oss.** Siano $B(\underline{x}_0, r)$ e $B'(\underline{x}_0, r)$ le sfere di centro $\underline{x}_0$ e raggio $r$ associate a due distanze $d$ e $d'$ su $\mathbb{R}^n$ che provengono da due norme $\|\cdot\|$ e $\|\ \|'$, per cui vale (*). allora

$$B'\left(\underline{x}_0, \frac{r}{C}\right) \subset B(\underline{x}_0, r) \subset B\left(\underline{x}_0, \frac{r}{c}\right)$$

Infatti,

$$c\, d'(\underline{x}_0, \underline{y}) \leq d(\underline{x}_0, \underline{y}) \leq C\, d'(\underline{x}_0, \underline{y}) \qquad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$$

Abbiamo:

se $d(\underline{x}_0,\underline{y})<r$, allora $d'(\underline{x}_0,\underline{y}) < \frac{r}{c} \Rightarrow B(\underline{x}_0,r) \subset B'(\underline{x}_0,\frac{r}{c})$

se $d'(\underline{x}_0,\underline{y})<r$, allora $d(\underline{x}_0,\underline{y}) < C\cdot r \Rightarrow B'(\underline{x}_0,r) \subset B(\underline{x}_0,Cr)$

(sost. $r$ con $r/C$) $\Rightarrow B'(\underline{x}_0,\frac{r}{C}) \subset B(\underline{x}_0,r)$.

Conseguenza: gli aperti associati a due norme equivalenti sono gli stessi.

Def. $f: \underset{\subseteq \mathbb{R}^n}{E} \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\underline{x}_0$ di accumulazione per $E$;

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} \underline{f}(\underline{x}) = \underline{\ell} = (\ell_1,\dots,\ell_m) \in \mathbb{R}^m$$

se $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta=\delta(\varepsilon)$ t.c.

in $\mathbb{R}^n$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ in $\mathbb{R}^m$

$$|\underline{x}-\underline{x}_0|<\delta \text{ e } \underline{x}\in E \Rightarrow |\underline{f}(\underline{x})-\underline{f}(\underline{x}_0)|<\varepsilon$$

Qui $|\cdot|$ è la norma euclidea, $\underline{x}=(x^1,\dots,x^n)$,
$\underline{f}=(f_1,\dots,f_m)$ e $f_j: E\to\mathbb{R}$

Ex. Sia $\|\ \|$ una norma equivalente alla norma euclidea. Mostrare che

$\underline{f}(\underline{x}) \longrightarrow \underline{\ell}$ nel senso sopra indicato

$\Updownarrow$

$\underline{f}(\underline{x}) \longrightarrow \underline{\ell}$ nel senso metrico della distanza associata a $\|\ \|$

**Def.** $f: \underset{\subseteq \mathbb{R}^n}{E} \to \mathbb{R}^m$, $\underline{x}_0 \in E$; $f$ è continua in $\underline{x}_0$ se...

Teorema (i) $K \subseteq \mathbb{R}^n$ è compatto (rispetto alla topologia euclidea) $\Leftrightarrow$ $K$ è chiuso e limitato

(ii) (Weierstrass) $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto, $f: K \to \mathbb{R}$ continua in $K$ $\Rightarrow$ $f$ ammette max e min in $K$.

Teorema Sia $\rho: \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ una norma. Allora

(i) $\exists\, C > 0$ t.c.

valore assoluto in $\mathbb{R}$ $\;\;$ norma euclidea in $\mathbb{R}^n$

$$|\rho(\underline{x}) - \rho(\underline{x}_0)| \leq C\, |\underline{x} - \underline{x}_0|$$

(ii) $\rho$ è continua da $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ a $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

(iii) $\rho$ è equivalente a $|\cdot|$

Dim.$^{(i)}$ $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ base canonica di $\mathbb{R}^n$; $\underline{y} = y_1 \underline{e}_1 + \dots + y_n \underline{e}_n$

Allora

$$\rho(\underline{y}) = \rho(y_1 \underline{e}_1 + \dots + y_n \underline{e}_n)$$

(dis. tr.) $\leq |y_1|\, \rho(\underline{e}_1) + \dots + |y_n|\, \rho(\underline{e}_n)$

$$\leq \max(\rho(\underline{e}_1), \dots, \rho(\underline{e}_n))\,(|y_1| + \dots + |y_n|)$$

Verifica a parte (per $n=2$) che $\sum_j |y_j| \leq \sqrt{n}\, |\underline{y}|$.

Complessivamente

$$\boxed{\rho(\underline{y}) \leq \overbrace{\sqrt{n}\, \max(\rho(\underline{e}_1), \dots, \rho(\underline{e}_n))}^{C :=}\, |\underline{y}|}$$

Quindi

conseguenza immediata della dis. tr.

$$\left| \rho(\underline{x}) - \rho(\underline{x}_0) \right| \leqslant \rho(\underline{x} - \underline{x}_0)$$

(stima precedente) $\leqslant C\,|\underline{x} - \underline{x}_0|$

e (i) è provato

(ii) segue immediatamente da (i) (anzi, di più, $\rho$ è Lip.)

(iii) Poiché $\rho$ è continua e $S := \{\underline{x}' : |\underline{x}'| = 1\}$ è cpt., $\rho$, ristretta a $S$, ammette max e min, $M, \underline{m > 0}$.
Quindi

($\rho(\underline{x}) = 0 \Rightarrow \underline{x} = 0$)

$$0 < m \leqslant \rho(\underline{x}') \leqslant M \qquad \forall \underline{x}' \in S.$$

inutile

[cioè

$$m|\underline{x}'| \leqslant \rho(\underline{x}') \leqslant M\,|\underline{x}'| \qquad \forall \underline{x}' \in S.]$$

(disegno)

Sia ora $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$. Allora $\underline{x} = |\underline{x}| \cdot \underline{x}'$ in modo unico, e quindi

$$\rho(\underline{x}) = \rho(|\underline{x}| \cdot \underline{x}') = |\underline{x}|\, \rho(\underline{x}') \leqslant M\,|\underline{x}|$$

e similmente

$$\rho(\underline{x}) \geqslant m\,|\underline{x}|. \qquad \square$$

Tutte le metriche indotte da norme in $\mathbb{R}^n$ sono equivalenti tra loro e hanno i medesimi aperti

**Def** $\{\underline{x}_n\}$ succ. in $(X, \| \ \|)$ è **di Cauchy** se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu = \nu(\varepsilon) : \quad n, m \geq \nu \ \Rightarrow \ \| \underline{x}_n - \underline{x}_m \| < \varepsilon$$

(o completo)

**Def** $(X, \| \ \|)$ è **di Banach** se ogni successione di Cauchy è convergente (a un elemento di $X$)

**Es.** $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ è di Banach (completezza di $\mathbb{R}$)

**Disuguaglianza fondamentale**

$$\boxed{\max(|x_1|, \dots, |x_n|) \leq |\underline{x}| \leq \sqrt{n} \ \max(|x_1|, \dots, |x_n|)}$$

**Dim.** Immediata. $\square$

**Corollario** $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ è di Banach

**Dim.** Immediata dalla completezza di $\mathbb{R}$ e dalla disuguaglianza fondamentale. $\square$

**Ex.*** Ogni spazio normato finito-dim. è di Banach

**Corollario** (della disuguaglianza fondamentale)

$\underline{f} : \underset{\subseteq \mathbb{R}^n}{E} \to \mathbb{R}^m$ è continua in $\underline{x}_0 \in E \Leftrightarrow$ ciascuna sua componente è continua in $\underline{x}_0$.

**Dim.** $\max(|f_1(\underline{x}) - f_1(\underline{x}_0)|, \dots, |f_m(\underline{x}) - f_m(\underline{x}_0)|)$

$$\leq |\underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{x}_0)|$$

$$\leq n \ \max(|f_1(\underline{x}) - f_1(\underline{x}_0)|, \dots, |f_m(\underline{x}) - f_m(\underline{x}_0)|) \quad \square$$

## Mappe lineari e continuità

**Notazione.** $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ spazio vettoriale delle mappe lineari da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$; $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) := \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$

**Teorema** Ogni mappa lineare da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ è continua (rispetto alla topologia euclidea)

**Dim.** $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$; $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ base canonica di $\mathbb{R}^n$;

$$
\begin{aligned}
|A\underline{x}| &= |A(x_1\underline{e}_1 + \dots + x_n\underline{e}_n)| \\
&= |x_1 A\underline{e}_1 + \dots + x_n A\underline{e}_n| \\
&\leq |x_1|\,|A\underline{e}_1| + \dots + |x_n|\,|A\underline{e}_n| \\
&\leq \max(|A\underline{e}_1|, \dots, |A\underline{e}_n|)\,(|x_1| + \dots + |x_n|) \\
&\leq \sqrt{n}\,\max(|A\underline{e}_1|, \dots, |A\underline{e}_n|)\,|\underline{x}|. \qquad \square
\end{aligned}
$$

**Def** $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ si chiama **duale** di $\mathbb{R}^n$ (e si indica con $(\mathbb{R}^n)^*$)

Dall'algebra lineare sappiamo che $(\mathbb{R}^n)^* \cong \mathbb{R}^n$ (isomorfismo di spazi vettoriali). Nel caso in cui pensiamo $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare euclideo

$$(\underline{x}, \underline{y}) := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

c'è un'*identificazione privilegiata* tra $\mathbb{R}^n$ e $(\mathbb{R}^n)^*$, che ora illustriamo.

Fissato $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$, l'applicazione

$$\underline{x} \xrightarrow{\lambda_{\underline{y}}} (\underline{x}, \underline{y})$$

è in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. L'applicazione $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ definita da

$$\varphi(\underline{y}) = \lambda_{\underline{y}}$$

è lineare e iniettiva. È anche suriettiva, perché, assegnato $\lambda \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ e posto $\underline{y} = (\lambda(\underline{e}_1), \dots, \lambda(\underline{e}_n))$, abbiamo

$$\begin{aligned} \lambda(\underline{x}) &= \lambda(x_1 \underline{e}_1 + \dots + x_n \underline{e}_n) \\ &= x_1 \lambda(\underline{e}_1) + \dots + x_n \lambda(\underline{e}_n) \\ &= (\underline{x}, \underline{y}) \end{aligned}$$

Quindi $\varphi$ è un isomorfismo di spazi vettoriali. Questo isomorfismo ha un ruolo fondamentale nella definizione di gradiente.

Norme su $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Data $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, poniamo

$$|||A||| := \sup_{|x| \leq 1} |Ax|$$

Qui assumiamo $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ muniti della norma euclidea

N.B.: $$|A\underline{x}| = \left| A\left( |\underline{x}| \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|} \right) \right| = |\underline{x}| \left| A\left( \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|} \right) \right| \leq |||A|||\ |\underline{x}|$$

**Ex.** Verificare che $|||\cdot|||$ è una norma su $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ e che $|||AB||| \leq |||A||| \cdot |||B|||$

La norma di Hilbert-Schmidt su $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ è definita da

$$\|A\|_{HS} := \left[ tr(A^t A) \right]^{1/2}$$

**N.B.:** $A^t A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$

Ricordiamo che se $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ e $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ è una qualunque base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ (rispetto al prodotto scalare euclideo), allora

$$tr(B) = \sum_{i=1}^{n} (B\underline{v}_i, \underline{v}_i)$$

**Ex.*** Dimostrare che la definizione è ben posta (cioè $tr(B)$ non dipende dalla base ortonormale scelta)

**Ex.** Verificare che $\|\cdot\|_{HS}$ è una norma

Sia $(a_{ij})$ la matrice che rappresenta $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$. Allora

$$\|A\|_{HS} = \left( \sum_{i,j} a_{ij}^2 \right)^{1/2}$$

**Ex.** Mostrare che $|||A||| \leq \|A\|_{HS}$.

# CALCOLO DIFFERENZIALE

## LEZIONE 2

La continuità di $\underline{f} = (f_1, \dots, f_m) : \underset{\subseteq \mathbb{R}^n}{E} \to \mathbb{R}^m$ equivale, in virtù della disuguaglianza fondamentale

$$\max(|x_1|, \dots, |x_n|) \leq |\underline{x}| \leq \sqrt{n} \max(|x_1|, \dots, |x_n|),$$

alla continuità delle componenti $f_j : \underset{\subseteq \mathbb{R}^n}{E} \to \mathbb{R}$

La situazione per $n \geq 2$ è molto più complicata che per $n = 1$

**Es.**

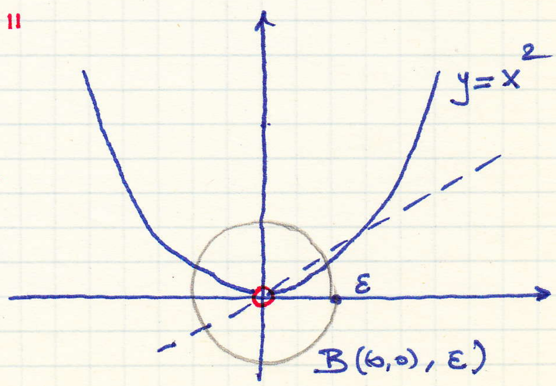
$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y = x^2 \text{ e } x \neq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$f$ non è continua in $(0,0)$, perché $\forall \varepsilon > 0$

$$\sup_{(x,y) \in B((0,0),\varepsilon)} f(x,y) = 1 \quad \text{e} \quad \inf_{(x,y) \in B((0,0),\varepsilon)} f(x,y) = 0$$

e quindi $\nexists \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$.

$f$ è continua in $(0,0)$ "per rette"



**Es.** 
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$f$ ammette limite su ogni retta per $(0,0)$, ma

$$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

Infatti per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f(x, \alpha x) = \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \qquad \forall x \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} f(x,\alpha x) = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}, \quad \text{che dipende da } \alpha.$$

**Def.** $f : \underset{\subseteq \mathbb{R}^n}{E} \to \mathbb{R}$ è continua in $E$ se è continua in ogni punto di $E$.

**Oss.** Le funzioni continue in $E$ costituiscono un'algebra (rispetto al prodotto puntuale).
La composizione di fni continue è continua.

**Ex.** Mostrare che se $\lim_{\underline{x}\to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = \ell$, allora per ogni $\underline{v} \neq \underline{0}$

$$\lim_{t\to 0} f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) = \ell$$

**Def.** $\lim_{\underline{x}\to\infty} f(\underline{x}) = \ell \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists M = M(\varepsilon)$ t.c.

$$|x| \geq M \quad \Rightarrow \quad |f(\underline{x}) - \ell| < \varepsilon.$$

# DERIVATE DIREZIONALI

**Def.** $\underline{v} \neq \underline{0}$, $\quad \underline{f} : \underset{\text{aperto}}{A} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\quad \underline{x} \in A$

Posto $\varphi_{\underline{v}}(t) = \underline{f}(\underline{x} + t\underline{v})$

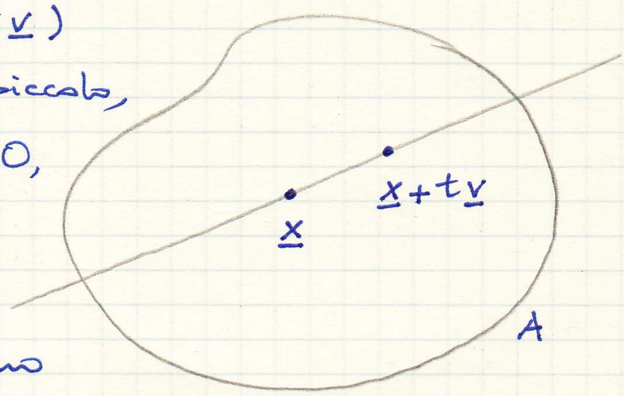
$\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon$ suff. piccolo,

se $\varphi_{\underline{v}}$ è derivabile in 0,

diremo che f ammette

in $\underline{x}$ derivata secondo

il vettore $\underline{v}$, e porremo




$$D_{\underline{v}} \underline{f}(\underline{x}) := \varphi'_{\underline{v}}(0)$$

Esplicitamente

$$D_{\underline{v}} \underline{f}(\underline{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi_{\underline{v}}(h) - \varphi_{\underline{v}}(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\underline{f}(\underline{x} + h\underline{v}) - \underline{f}(\underline{x})}{h}$$

- se $|v| = 1$, $D_{\underline{v}} \underline{f}(\underline{x})$ si chiama derivata direzionale di $\underline{f}$ in $\underline{x}$ rispetto alla direzione $\underline{v}$

- se $\underline{v} = \underline{e}_j$, $D_{\underline{v}} \underline{f}(\underline{x})$ si chiama derivata parziale j-esima di $\underline{f}$ in $\underline{x}$

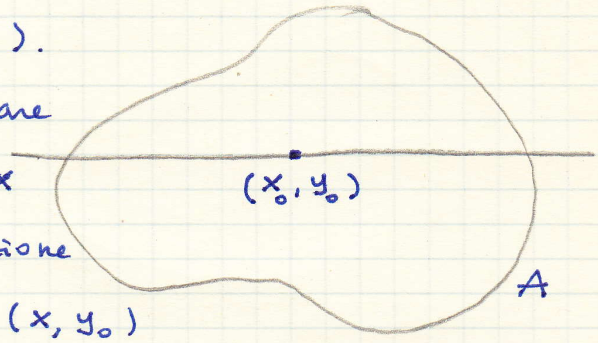
Notazioni per $D_{\underline{e}_j} \underline{f}$ : $\quad \dfrac{\partial \underline{f}}{\partial x_j}$, $\quad \underline{f}_{x_j}$, $\quad D_j$, ...

**Es.** $m = 1, \quad n = 2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0)}{h}$$

$$= \psi'(x_0),$$

dove $\psi(t) := f(t, y_0)$.




In altre parole, per derivare $f$ parzialmente rispetto a $x$ bisogna derivare la funzione di una variabile $x \mapsto f(x, y_0)$

**Es.**

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Calcolare le derivate direzionali di $f$ in $(0,0)$.

$\underline{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$

$$\varphi_{\underline{v}}(t) = f(0 + t\cos\theta, 0 + t\sin\theta)$$

$$= \frac{t^2 \cos\theta \sin\theta}{|t|}$$

$$= |t| \cos\theta \sin\theta$$

$\varphi_{\underline{v}}$ è derivabile in $0$ $\iff$ $\cos\theta \sin\theta = 0$ $\iff$ $\theta \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$

In tal caso $\varphi_{\underline{v}}'(0) = 0$ e quindi $D_{\underline{v}} f(0,0) = 0$

Nelle altre direzioni $\varphi_{\underline{v}}$ presenta un punto angoloso

**Es.** $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Calcolare le derivate direzionali di $f$ in $(0,0)$

$\underline{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$

$\varphi_{\underline{v}}(t) = t\cos^3\theta$, $\quad \varphi_{\underline{v}}'(0) = \cos^3\theta \Rightarrow D_{\underline{v}} f(0,0) = \cos^3\theta$

**Ex.** $f(x,y,z) = |x+y+z|$, $\quad \underline{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ t.c. $|x_0+y_0+z_0| = 0$

Per quali direzioni $\underline{v}$ esiste

$$D_{\underline{v}} f(\underline{x}_0)\ ?$$

**Ex.** Mostrare che $D_{\lambda\underline{v}} f(\underline{x}) = \lambda D_{\underline{v}} f(\underline{x})$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$. In particolare,

$$D_{-\underline{v}} f(\underline{x}) = -D_{\underline{v}} f(\underline{x})$$

**Ex.** Mostrare, utilizzando uno degli esempi della Lezione 2, che $f$ può ammettere derivate direzionali in un punto $\underline{x}_0$ lungo ogni direzione senza essere continua in $\underline{x}_0$.

Mostrare che se $\exists D_{\underline{v}} f(\underline{x}_0)$, allora $t \mapsto f(\underline{x}_0 + t\underline{v})$ è continua in $0$.

# DIFFERENZIABILITÀ

Ripasso della differenziabilità di f.ni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ (mappe lineari da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, approssimabilità con mappe lineari)

<u>Def.</u> $\underline{f} : \underset{\subseteq \mathbb{R}^n}{\overset{\text{aperto}}{A}} \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\underline{x}_0 \in A$. Diciamo che $f$ è differenziabile in $\underline{x}_0$ se esiste un'applicazione lineare $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ t.c.

$$(*) \qquad \lim_{\underline{h} \to \underline{0}} \frac{|\underline{f}(\underline{x}_0 + \underline{h}) - \underline{f}(\underline{x}_0) - L\underline{h}|}{|\underline{h}|} = 0$$

Ricordiamo la relazione

$$|T\underline{x}| \leq \|T\| \, |\underline{x}| \qquad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n \ \forall T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

<u>Oss.</u> Se $L$ e $L'$ verificano $(*)$, allora $L = L'$

Infatti

$$\frac{|(L-L')\underline{h}|}{|\underline{h}|} \leq \frac{|\underline{f}(\underline{x}_0 + \underline{h}) - \underline{f}(\underline{x}_0) - L'\underline{h}|}{|\underline{h}|} + \frac{|\underline{f}(\underline{x}_0 + \underline{h}) - \underline{f}(\underline{x}_0) - L\underline{h}|}{|\underline{h}|} \xrightarrow[\underline{h} \to \underline{0}]{} 0$$

Scelto $\underline{h} = t\,\underline{e}_j$ e facendo tendere $t$ a $0^+$ si ha

$$|(L-L')\underline{e}_j| = 0 \quad j=1,\dots,n \quad \Rightarrow \quad L = L' \qquad \square$$

L'applicazione $L$ della definizione precedente si chiama **differenziale di $\underline{f}$ in $\underline{x}_0$**

Notazioni per il differenziale di $\underline{f}$ in $\underline{x}_0$

$$d\underline{f}(\underline{x}_0), \quad \underline{f}'(\underline{x}_0)$$

**Teorema** $\underline{f}$ diff.le in $\underline{x}_0 \Rightarrow \underline{f}$ cont. in $\underline{x}_0$

**Dim**

$$\begin{aligned}|\underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{x}_0)| &\leq |\underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{x}_0) - L(\underline{x}-\underline{x}_0)| \\ &\quad + |L(\underline{x}-\underline{x}_0)| \\ &\leq |\underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{x}_0) - L(\underline{x}-\underline{x}_0)| \\ &\quad + |||L||| \, |\underline{x}-\underline{x}_0| \\ &\xrightarrow[\underline{x}\to\underline{x}_0]{} 0 \end{aligned} \qquad \square$$

## Applicazioni lineari da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ e appl. lin. da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$

Sia $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Poniamo

$$L_j \underline{x} := (L\underline{x}, \underline{e}_j) \qquad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n:$$

allora $L_j \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$.

D'altra parte, siano $L_1, \dots, L_m \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ e poniamo

$$L\underline{x} := (L_1 \underline{x}, \dots, L_m \underline{x}).$$

Allora $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

**Teorema** $\underline{f} = (f_1, \dots, f_m)$, (qui implicitamente supponiamo di considerare la base canonica di $\mathbb{R}^m$) è diff.le in $\underline{x}_0$

$$\Updownarrow$$

$f_1, \dots, f_m$ sono diff.li in $\underline{x}_0$ (come funzioni da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$)

**Dim.** $\Downarrow$ Poniamo $L := d\underline{f}(\underline{x}_0)$ e $L_j \underline{x} = (L\underline{x}, \underline{e}_j)$

$$|f_j(\underline{x}_0 + \underline{h}) - f_j(\underline{x}_0) - L_j \underline{h}|$$

$$\leq \left( \sum_{k=1}^{m} |f_k(\underline{x}_0 + \underline{h}) - f_k(\underline{x}_0) - L_k \underline{h}|^2 \right)^{1/2}$$

$$= |\underline{f}(\underline{x}_0 + \underline{h}) - \underline{f}(\underline{x}_0) - L\underline{h}|$$

$$= o(|\underline{h}|)$$

$\Uparrow$ Poniamo $L_j := df_j(\underline{x}_0)$ e $L\underline{x} = (L_1 \underline{x}, \dots, L_m \underline{x})$

$$|\underline{f}(\underline{x}_0 + \underline{h}) - \underline{f}(\underline{x}_0) - L\underline{x}|$$

$$= \left( \sum_{j=1}^{m} |f_j(\underline{x}_0 + \underline{h}) - f_j(\underline{x}_0) - L_j \underline{x}|^2 \right)^{1/2}$$

$$= o(|h|) \qquad \square$$

## Esempi notevoli di applicazioni differenziabili

(i) $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ è diff.le in ogni pto $\underline{x}_0$ e

$$dL(\underline{x}_0) = L$$

Infatti $L(\underline{x}_0 + \underline{h}) - L\underline{x}_0 - L\underline{h} \equiv \underline{0} \quad \forall \underline{h}$

prodotto euclideo in $\mathbb{R}^m$

(ii) $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$; $\quad B(\underline{x}, \underline{y}) = (A\underline{x}, \underline{y}) \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n \ \forall \underline{y} \in \mathbb{R}^m$

è diff.le in ogni pto $(\underline{x}_0, \underline{y}_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ e

$$dB(\underline{x}_0, \underline{y}_0)(\underline{h}, \underline{k}) = B(\underline{h}, \underline{y}_0) + B(\underline{x}_0, \underline{k}) \qquad \forall \underline{h} \in \mathbb{R}^m \quad \forall \underline{k} \in \mathbb{R}^m$$

Infatti

$$B(\underline{x}_0 + \underline{h}, \underline{y}_0 + \underline{k}) - B(\underline{x}_0, \underline{y}_0) - B(\underline{h}, \underline{y}_0) - B(\underline{x}_0, \underline{k})$$

$$= B(\underline{h}, \underline{k})$$

e

$$\frac{|B(\underline{h}, \underline{k})|}{|(\underline{h}, \underline{k})|} \leq \frac{|A\underline{h}|\,|\underline{k}|}{(|\underline{h}|^2 + |\underline{k}|^2)^{1/2}}$$

Cauchy-Schwarz

$$\leq |||A||| \frac{|\underline{h}|\,|\underline{k}|}{(|\underline{h}|^2 + |\underline{k}|^2)^{1/2}}$$

$$\leq |||A||| \frac{1}{2} \frac{|\underline{h}|^2 + |\underline{k}|^2}{(|\underline{h}|^2 + |\underline{k}|^2)^{1/2}}$$

$$\to 0$$

$$|\underline{h}|, |\underline{k}| \to 0$$

(iii) sia $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la proiezione sull'i-esima componente: $\pi_i(\underline{x}) := x_i$.

Poiché $\pi_i$ è lineare, $d\pi_i = \pi_i$.

Ricordiamo che $\pi_1, \dots, \pi_n$ costituiscono una base di $(\mathbb{R}^n)^*$ (duale di $\mathbb{R}^n$) e ogni $\lambda \in (\mathbb{R}^n)^*$ si può scrivere

$$(*) \qquad \lambda = \sum_{j=1}^{n} c_j \pi_j$$

con $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. La mappa

$$(\mathbb{R}^n)^* \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^n$$

definita da

$$\varphi\left(\sum_{j=1}^{n} c_j \pi_j\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j \underline{e}_j$$

è uno (tra gli infiniti possibili) isomorfismi tra $(\mathbb{R}^n)^*$ e $\mathbb{R}^n$. È l'unico isomorfismo che trasforma la dualità nel prodotto scalare, cioè

$$\underbrace{\lambda(\underline{x})}_{\text{dualità tra } (\mathbb{R}^n)^* \text{ e } \mathbb{R}^n} = (\underline{x}, \varphi(\lambda))$$

prodotto scalare euclideo

Infatti, se $\lambda$ è come in $(*)$ e $\underline{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \underline{e}_j$, ambo i membri valgono

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

## Che aspetto ha l'applicazione $d\underline{f}(\underline{x}_0)$ ?

**Teorema** $\underline{f}$ diff.le in $\underline{x}_0 \Rightarrow \exists\, D_{\underline{v}}\underline{f}(\underline{x}_0)$ e

$$(*) \qquad D_{\underline{v}}\underline{f}(\underline{x}_0) = d\underline{f}(\underline{x}_0)\cdot\underline{v} \qquad \forall\,\underline{v}\in\mathbb{R}^n$$

**Dim.**

$$\frac{\underline{f}(\underline{x}_0+t\underline{v})-\underline{f}(\underline{x}_0)}{t} = \frac{\underline{f}(\underline{x}_0+t\underline{v})-\underline{f}(\underline{x}_0)-d\underline{f}(\underline{x}_0)(t\underline{v})}{t} + \frac{d\underline{f}(\underline{x}_0)(t\underline{v})}{t}$$

$$= o(t) + d\underline{f}(\underline{x}_0)\,\underline{v}$$

$\square$

N.B. Se $\underline{f}$ è diff.le in $\underline{x}_0$, allora $\underline{v}\longmapsto D_{\underline{v}}\underline{f}(\underline{x}_0)$ è lineare in $\underline{v}$

Oss. $\exists\, D_{\underline{v}}\underline{f}(\underline{x}_0)\ \forall\,\underline{v}\in\mathbb{R}^n$ e $D_{\underline{v}}\underline{f}(\underline{x}_0)$ è lineare in $\underline{v}$

$$\not\Downarrow$$

$\underline{f}$ diff.le in $\underline{x}_0$

Basta considerare

$$f(x,y) = \begin{cases} x & \text{se } y = x^2 \\ 0 & \text{se } y \neq x^2 \end{cases}$$

Abbiamo $D_{\underline{v}} f(0,0) = 0 \quad \forall\,\underline{v}\in\mathbb{R}^n$. Tuttavia

$$\frac{|f(x,x^2) - f(0,0) - 0|}{|(x,x^2)|} = \frac{|x|}{(x^2+x^4)^{1/2}} \xrightarrow{x\to 0} 1$$

Notare che $f$ è continua in $(0,0)$.

Oss. Dalla formula $(*)$ (con $\underline{e}_j$ al posto di $\underline{v}$) ricaviamo

$$\frac{\partial \underline{f}}{\partial x_j}(\underline{x}_0) = d\underline{f}(\underline{x}_0)\cdot \underline{e}_j$$

Supponendo, come implicitamente facciamo, che le componenti di un vettore di $\mathbb{R}^m$ siano rispetto alla base canonica $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_m$, abbiamo

$$d\underline{f}(\underline{x}_0)\,\underline{e}_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\underline{x}_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(\underline{x}_0) \end{bmatrix}$$

Se pensiamo di riferire anche lo spazio di partenza $\mathbb{R}^n$ alla base canonica $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$, allora l'applicazione $d\underline{f}(\underline{x}_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ è rappresentata dalla matrice le cui colonne sono $d\underline{f}(\underline{x}_0)\,\underline{e}_j$. Quindi, posto

$$J_{\underline{f}}(\underline{x}_0) := \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\underline{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\underline{x}_0) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\underline{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\underline{x}_0) \end{bmatrix},$$

$J_{\underline{f}}(\underline{x}_0)$ è la matrice che rappresenta l'applicazione

lineare $d\underline{f}(\underline{x}_0)$ quando $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ sono dotate delle rispettive basi canoniche; $J_{\underline{f}}(\underline{x}_0)$ si chiama matrice jacobiana di $\underline{f}$ in $\underline{x}_0$.

Se $m=1$, allora

$$J_f(\underline{x}_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x}_0) \right)$$

In questo caso si usa la notazione $\nabla f(\underline{x}_0)$ invece di $J_f(\underline{x}_0)$ e il vettore $\nabla f(\underline{x}_0)$ si chiama gradiente di $f$ in $\underline{x}_0$. Nel caso $m=1$, se $\mathbb{R}^n$ è riferito alla base canonica $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$, allora

$$df(\underline{x}_0)\underline{h} = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}_0), \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x}_0) \right] \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}_0) \cdot h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x}_0)\, h_n$$

$$= (\nabla f(\underline{x}_0), \underline{h}) \leftarrow \text{prodotto euclideo}$$

<u>Es.</u> La f.ne $f(x,y) = (x+1)\sqrt{|y|}$ è diff.le in $(-1,0)$

Infatti $\nabla f(-1,0) = (0,0)$ e

$$\frac{f(-1+h,k) - f(-1,0) - \nabla f(-1,0)\cdot(h,k)}{(h^2+k^2)^{1/2}} = \frac{h\sqrt{|k|}}{(h^2+k^2)^{1/2}}$$

$$(h = r\cos\theta \quad k = r\sin\theta) \qquad = \frac{r^{3/2}\cos\theta\sqrt{|\sin\theta|}}{r} \underset{r\to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

# CALCOLO DIFFERENZIALE

## LEZIONE 3

**Ex.** Siano $f, g$ diff.li in $\underline{x}_0$. Allora $\alpha f$, $f+g$ e $f \cdot g$ sono diff.li in $\underline{x}_0$ e

$$d(\alpha f)(\underline{x}_0) = \alpha\, df(\underline{x}_0)$$

$$d(f+g)(\underline{x}_0) = df(\underline{x}_0) + dg(\underline{x}_0)$$

$$d(fg)(\underline{x}_0) = g(\underline{x}_0)\, df(x_0) + f(x_0)\, dg(x_0)$$

Quindi le f.ni differenziabili in ogni punto di un aperto A sono un'algebra rispetto al prodotto p.tuale.

**Teorema** Siano $\underline{f} : \underset{\subseteq \mathbb{R}^p}{A} \to \mathbb{R}^n$, $\underline{g} : \underset{\subseteq \mathbb{R}^n}{B} \to \mathbb{R}^m$, $\underline{x}_0 \in A$, $\underline{f}(\underline{x}_0) \in B$, $\underline{f}$ diff.le in $\underline{x}_0$, $\underline{g}$ diff.le in $\underline{f}(\underline{x}_0)$, $B \supseteq \underline{f}(A)$. Allora $\underline{g} \circ \underline{f}$ è diff.le in $\underline{x}_0$ e

$$d(\underline{g} \circ \underline{f})(\underline{x}_0) = d\underline{g}(\underline{f}(\underline{x}_0)) \cdot d\underline{f}(\underline{x}_0)$$

**Dim.** Dobbiamo mostrare che

$$\underline{\varphi}(\underline{h}) := (\underline{g} \circ \underline{f})(\underline{x}_0 + \underline{h}) - (\underline{g} \circ \underline{f})(\underline{x}_0) - d\underline{g}(\underline{f}(\underline{x}_0))\, d\underline{f}(\underline{x}_0)\, \underline{h} = o(|\underline{h}|).$$

Ma

$$\underline{\varphi}(\underline{h}) = \underline{g}(\underline{f}(\underline{x}_0) + \overbrace{\underline{f}(\underline{x}_0 + \underline{h}) - \underline{f}(\underline{x}_0)}^{=:\,\underline{k}}) - \underline{g}(\underline{f}(\underline{x}_0)) - d\underline{g}(\underline{f}(\underline{x}_0))\, d\underline{f}(\underline{x}_0)\, \underline{h}$$

(g diff.le in $\underline{f}(\underline{x}_0)$)

$$= d\underline{g}(\underline{f}(\underline{x}_0)) \cdot \underline{k} - d\underline{g}(\underline{f}(\underline{x}_0))\, d\underline{f}(\underline{x}_0)\, \underline{h}$$

$$= d\underline{g}(\underline{f}(\underline{x}_0))\left[\underline{f}(\underline{x}_0+\underline{h})-\underline{f}(\underline{x}_0)-d\underline{f}(\underline{x}_0)\cdot\underline{h}\right]$$

Quindi

$$\frac{|\underline{\varphi}(\underline{h})|}{|\underline{h}|} \leq |||d\underline{g}(\underline{f}(\underline{x}_0))||| \; \frac{|\underline{f}(\underline{x}_0+\underline{h})-\underline{f}(\underline{x}_0)-d\underline{f}(\underline{x}_0)\underline{h}|}{|\underline{h}|}$$

(f è diff.le in $\underline{x}_0$) $\to 0$ $\quad \underline{h}\to\underline{0}$

□

Casi particolari (i) $\underline{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \Rightarrow g\circ\underline{f}: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$d\underline{f}(x) \cong \begin{bmatrix} f_1'(x) \\ \vdots \\ f_n'(x) \end{bmatrix} \qquad dg(\underline{y}) \cong \left[\frac{\partial g}{\partial y_1}(\underline{y}) \cdots \frac{\partial g}{\partial y_n}(\underline{y})\right]$$

$$\Rightarrow \qquad d(g\circ\underline{f})(x) \cong \left[\frac{\partial g}{\partial y_1}(\underline{f}(x)) \cdots \frac{\partial g}{\partial y_n}(\underline{f}(x))\right] \begin{bmatrix} f_1'(x) \\ \vdots \\ f_n'(x) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\partial g}{\partial y_1}(\underline{f}(x))\, f_1'(x) + \dots + \frac{\partial g}{\partial y_n}(\underline{f}(x))\, f_n'(x)$$

(ii) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad g: \mathbb{R}\to\mathbb{R} \Rightarrow g\circ f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$df(\underline{x}) \cong \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}) \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x})\right] \quad dg(y) \cong g'(y)$$

$$\Rightarrow \quad d(g\circ f)(\underline{x}) \cong \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x})\, g'(y) \;\; \cdots \;\; \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x})\, g'(y)\right]$$

**Es.** (derivate di una funzione in coordinate polari) Siano $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\underline{F}: (0,+\infty)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\underline{F}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

Calcoliamo $d(g\circ \underline{F})(r,\theta)$

$$dg(\underline{F}(r,\theta)) \cong \left[ \frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) \quad \frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \right]$$

$$d\underline{F}(r,\theta) \cong \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad d(g\circ\underline{F})(r,\theta) \cong \left[ \frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) \; \frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \right] \times \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \left[ \cos\theta \frac{\partial g}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial g}{\partial y} ; \; -r\sin\theta \frac{\partial g}{\partial x} + r\cos\theta \frac{\partial g}{\partial y} \right]$$

Quindi

$$\frac{\partial (g\circ\underline{F})}{\partial r} = \cos\theta \frac{\partial g}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial g}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(g\circ\underline{F}) = -r\sin\theta \frac{\partial g}{\partial x} + r\cos\theta \frac{\partial g}{\partial y}.$$

__Ex.__ Sia $F(x,y) = f(x,y,g(x,y))$. Esprimere le derivate parziali di $F$ in funzione di quelle di $f$ e di $g$

__Ex.__ Coordinate cilindriche e sferiche in $\mathbb{R}^3$ (vd. foglio di es.)

__Ex.__ Calcolare il diff.le delle funzioni seguenti

(a) $f(\underline{x}) = |\underline{x}|^2$ (b) $f(\underline{x}) = |\underline{x}|^a$ $a \in \mathbb{R}$

(c) $f(\underline{x}) = \langle \underline{x}, \underline{x}_0 \rangle$ con $\underline{x}_0$ fissato

(d) $f(\underline{x}) = \overset{\text{prodotto scalare euclideo}}{\langle \underline{x}, \underline{x}_0 \rangle^2}$ (e)* $Q(\underline{x}) = \overset{\text{prodotto scalare euclideo}}{\langle B\underline{x}, \underline{x} \rangle}$, dove $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$

## Un'importante condizione sufficiente di diff.tà.

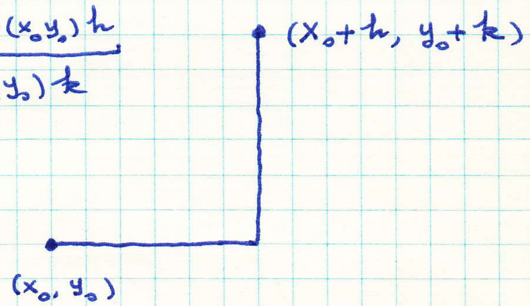
**Teorema** (del differenziale totale) Se $f : \underset{\subseteq \mathbb{R}^n}{B(\underline{x}_0, r)} \to \mathbb{R}$,

- $\exists\ \partial_j f(\underline{x}) \quad \forall\, \underline{x} \in B(\underline{x}_0, r) \quad j = 1, \dots, n$
- $\partial_1 f, \dots, \partial_n f$ sono continue in $\underline{x}_0$

allora $f$ è diff.le in $\underline{x}_0$.

**Dim.** (nel caso $n = 2$)

$$\varphi(h,k) := f(x_0+h, y_0+k) \overbrace{- f(x_0+h, y_0) + f(x_0+h, y_0)} - f(x_0,y_0) - \partial_x f(x_0,y_0)\,h - \partial_y f(x_0,y_0)\,k$$




$$f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0) - \partial_x f(x_0,y_0)\,h = o(h)$$

($f(\cdot, y_0)$ è der. in $x_0$, come f.ne di una variabile)

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) \underset{\uparrow}{=} k\, \partial_y f(x_0+h,\ y_0 + \theta_h k)$$

teorema del valor medio per funzioni di una variabile

Quindi

$$\frac{\varphi(h,k)}{(h^2+k^2)^{1/2}} = \frac{o(h) + k\,\overbrace{\left[\partial_y f(x_0+h,\ y_0+\theta_h k) - \partial_y f(x_0,y_0)\right]}^{= o(1) \text{ per } (h,k)\to(0,0) \text{ per la cont. di } \partial_y}}{(h^2+k^2)^{1/2}}$$

$$\to 0 \qquad \square$$

N.B.: la dimostrazione usa la continuità in $(x_0, y_0)$ di una sola delle due derivate parziali.

CALCOLO DIFFERENZIALE

LEZIONE 4

## Conseguenze della differenziabilità

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diff.le in $x_0$. Allora la retta $\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}$ retta tg

è la retta per $(x_0, f(x_0))$ che meglio approssima il grafico di $f$ in un intorno di $x_0$.

Analogamente, sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diff.le in $\underline{x}_0$.

L'iper-piano

$$z = f(\underline{x}_0) + \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{x} - \underline{x}_0 \rangle$$

è l'iperpiano per $(\underline{x}_0, f(\underline{x}_0))$ che meglio approssima il grafico di $f$ in un intorno di $\underline{x}_0$ e si chiama iperpiano tg al grafico di $f$ in $\underline{x}_0$.

Se $n=2$

$$\boxed{z = f(x_0, y_0) + \partial_x f(x_0, y_0)\,(x-x_0) + \partial_y f(x_0, y_0)\,(y-y_0).}$$

**Ex.** Scrivere il piano tg al paraboloide $z = x^2+y^2$ nel pto $(1,1,2)$

**Ex.** Siano $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diff.le in $(x_0, y_0)$ e $z_{a,b}$ il piano

$$z_{a,b} = f(x_0, y_0) + a\,(x-x_0) + b\,(y-y_0).$$

Mostrare che

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - z_{a,b}}{|(x-x_0, y-y_0)|} = 0 \iff \begin{array}{l} a = \partial_x f(x_0, y_0) \\ b = \partial_y f(x_0, y_0) \end{array}$$

**Teorema** (dell'incremento finito, $m=1$) $f: \underset{\subseteq \mathbb{R}^n}{A} \to \mathbb{R}$ (aperto)

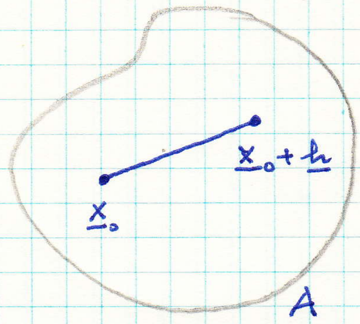
$[\underline{x}_0, \underline{x}_0 + \underline{h}] \subset A$ e supponiamo

(i) $f$ continua in $[\underline{x}_0, \underline{x}_0 + \underline{h}]$

(ii) $f$ diff.le in $(\underline{x}_0, \underline{x}_0 + \underline{h})$.

Allora esiste $\theta$ t.c.

$$f(\underline{x}_0 + \underline{h}) - f(\underline{x}_0) = \nabla f(\underline{x}_0 + \theta \underline{h}) \cdot \underline{h}$$




**Dim.** Applicare il teorema di Lagrange alla funzione $g(t) := f(\underline{x}_0 + t\underline{h})$. $\square$

**Corollario** Sia $f: \underset{\subseteq \mathbb{R}^n}{A} \to \mathbb{R}$ diff.le, $A$ aperto **connesso**. Le affermazioni seguenti sono equiv.

(i) $f$ costante in $A$

(ii) $df(\underline{x}) = 0 \quad \forall \underline{x} \in A$.

**Dim.** (i) $\Rightarrow$ (ii) ovvio

(ii) $\Rightarrow$ (i) Fissiamo $\underline{x}_0 \in A$ e definiamo

$$A_1 = \{ \underline{x} \in A : \ f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) \}$$

$$A_2 = \{ \underline{x} \in A : \ f(\underline{x}) \neq f(\underline{x}_0) \}.$$

$A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

$A_1$ è <u>aperto</u>: se $\underline{x} \in A_1$ e $B(\underline{x}, r) \subset A$, allora $\forall \underline{y} \in B(\underline{x}, r)$

$$f(\underline{y}) - f(\underline{x}) = \underbrace{df(\underline{x} + \theta(\underline{y} - \underline{x}))}_{=0} \cdot (\underline{y} - \underline{x})$$

$\Rightarrow \underline{y} \in A_1$

$|f(\underline{x})-f(\underline{x}_0)| =: \varepsilon > 0$, e,

$A_2$ è aperto: se $\underline{x} \in A_2$, allora, per la continuità di $|f - f(\underline{x}_0)|$, esiste un intorno di $\underline{x}$ in cui $|f - f(\underline{x}_0)| > \frac{\varepsilon}{2}$.

Poiché $A$ è connesso e $A_1 \neq \emptyset$ (contiene $\underline{x}_0$), abbiamo

$A_1 = A$ $\square$

**Teorema** (dell'incremento finito, $m > 1$) $\underline{f}: \underset{\subseteq \mathbb{R}^n}{\overset{\text{aperto}}{A}} \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, $[\underline{x}_0, \underline{x}_0 + \underline{h}] \subset A$ diff.le in $A$. Allora

$$|\underline{f}(\underline{x}_0 + \underline{h}) - \underline{f}(\underline{x}_0)| \leq C \, |\underline{h}|$$

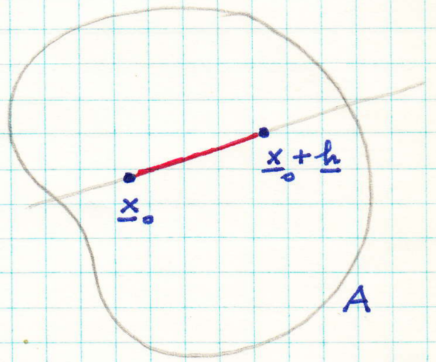
dove $C = \sup_{\underline{x} \in [\underline{x}_0, \underline{x}_0 + \underline{h}]} \| d\underline{f}(\underline{x}) \|$.

Sia $M > C$;

**Dim.** $E := \{ t \in [0,1] : |\underline{f}(\underline{x}_0 + t\underline{h}) - \underline{f}(\underline{x}_0)| \leq M \, t \, |\underline{h}| \}$.

Osserviamo che $0 \in E$ e che $E$ è chiuso (perché $\underline{f}$ è continua)

$\Rightarrow$ $E$ ha massimo, che indichiamo con $\mu$. Ovviamente $\mu \leq 1$.




Mostriamo che non può essere $\mu < 1$.

Infatti, se $\mu < 1$ e $1 > t > \mu$

$$|\underline{f}(\underline{x}_0 + t\underline{h}) - \underline{f}(\underline{x}_0)| \leq |\underline{f}(\underline{x}_0 + t\underline{h}) - \underline{f}(\underline{x}_0 + \mu\underline{h})|$$
$$+ |\underline{f}(\underline{x}_0 + \mu\underline{h}) - \underline{f}(\underline{x}_0)|$$
$$\leq |d\underline{f}(\underline{x}_0 + \mu\underline{h}) \cdot (t-\mu)\underline{h} + o(|t-\mu|)|$$
$$+ M\mu |\underline{h}|$$
$$\leq (C(t-\mu) + M\mu)\, |\underline{h}| + o(|t-\mu|)$$

Scegliamo $t$ ($t-\mu$ piccolo) t.c. $|o(t-\mu)| \leq (M-C)(t-\mu)$. L'espressione

**Corollario.** $\underline{f}: \underset{\subseteq \mathbb{R}^n}{C} \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\underline{f}$ diff.le in $C$ e
aperto convesso

$$(*) \qquad M := \sup_{\underline{z} \in C} |||\, d\underline{f}(\underline{z}) \,||| < \infty .$$

Allora $\underline{f}$ è lipschitziana in $C$ con costante $M$.

**Dim.** Immediata dal teorema dell'incremento finito. $\square$

**Oss.** $(*) \Rightarrow \sup_{\underline{z} \in C} \left| \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\underline{z}) \right| \leq M$

$$\Big( \quad |||\, d\underline{f}(\underline{z}) \,||| = \sup_{|\underline{h}| \leq 1} | d\underline{f}(\underline{z}) \underline{h} |$$

$$\geq | \langle d\underline{f}(\underline{z}) \underline{e}_k , \underline{e}_j \rangle |$$

$$= \left| \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\underline{z}) \right| \Big)$$

D'altra parte, se assumiamo

$$\sup_{\underline{z} \in C} \left| \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\underline{z}) \right| \leq M \qquad \begin{array}{l} j = 1, \dots, m \\ k = 1, \dots, n, \end{array}$$

allora $|||\, d\underline{f}(\underline{z}) \,||| \leq \| d\underline{f}(\underline{z}) \|_{HS}$

$$\leq \sqrt{m \cdot n} \; M .$$

Quindi se le derivate parziali di $\underline{f}$ sono limitate in $C$ da $M$, allora $\underline{f}$ è lip. con costante $\sqrt{m \cdot n}\, M$.

**N.B.** L'ipotesi di convessità nel Corollario precedente non può essere eliminata, ~~come~~ mostra l'esempio del tornante. Sia $E$ l'insieme disegnato in figura (le ~~righe~~ linee tratteggiate non fanno parte di $E$)

precedente è dominata da $Mt|\underline{h}|$ e quindi $t \in E$; assurdo, perché $\mu = \max E$. $\square$

<u>Oss.</u> Se $m > 1$, il teorema dell'incremento finito nella forma:

$$\exists \theta : \qquad \underline{f}(\underline{x}_0 + \underline{h}) - \underline{f}(\underline{x}_0) = d\underline{f}(\underline{x}_0 + \theta \underline{h}) \cdot \underline{h}$$

è falso.

Consideriamo $\underline{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$f(x) = (\cos x, \sin x)$$

Allora $\underline{f}(2\pi) - \underline{f}(0) = 0$, ma $df(z) = (-\sin z, \cos z)$ non è mai nullo.

<u>Corollario.</u> $\underline{f} : \underset{\subseteq \mathbb{R}^n}{A} \to \mathbb{R}^m$, $[\underline{x}_0, \underline{x}_0 + \underline{h}] \subset A$, e supponiamo

(i) $\underline{f}$ continua in $[\underline{x}_0, \underline{x}_0 + \underline{h}]$

(ii) $\underline{f}$ diff.le in $(\underline{x}_0, \underline{x}_0 + \underline{h})$ (segmento aperto)

Allora

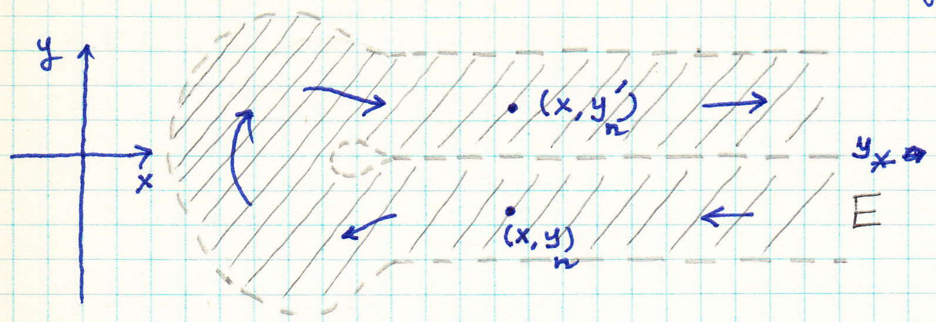
$$|\underline{f}(\underline{x}_0 + \underline{h}) - \underline{f}(\underline{x}_0)| \leq C\, |\underline{h}|,$$

dove

$$C := \sup_{\underline{x} \in (\underline{x}_0, \underline{x}_0 + \underline{h})} |||\, d\underline{f}(\underline{x})\, |||.$$

<u>Dim.</u> Per esercizio (applicare il teorema a segmenti $[\underline{x}', \underline{x}' + \underline{k}] \subset (\underline{x}_0, \underline{x}_0 + \underline{h})$). $\square$

La funzione $f : E \to \mathbb{R}$ descrive in ogni punto di $E$ la quota (s.l.m.) della strada, che si suppone in salita (nel verso delle frecce)




Siano $y_n \uparrow y_*$ e $y'_n \downarrow y_*$. allora $|(x, y'_n) - (x, y_n)| \to 0$,

ma

$$f(x, y'_n) - f(x, y_n) \not\to 0 .$$

Ex. Mostrare che la funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$f(\underline{x}) = \frac{1}{1 + |\underline{x}|^2} \qquad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$$

è lipschitziana in $\mathbb{R}^n$

Ex. Mostrare che la funzione $\underline{F} : \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\} \to \mathbb{R}^n$

$$\underline{F}(\underline{x}) = \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|}$$

è lipschitziana in $\mathbb{R}^n \setminus B(\underline{0}, r)$ per ogni $r > 0$.
È lipschitziana in $\mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$ ?

Ex. Sia $f : \underset{\subseteq \mathbb{R}^2}{\overset{\text{aperto}}{A}} \to \mathbb{R}$ diff.le. Mostrare che se per ogni $x$ fissato la funzione $y \mapsto f(x, y)$ è costante, allora $\partial_y f \equiv 0$ in $A$. Vale il viceversa? Discutere poi il caso in cui $A$ è convesso.

## Funzioni di classe $\mathcal{C}^1$

**Def.** $\underline{f}: \underset{\subseteq \mathbb{R}^n}{\overset{\text{aperto}}{A}} \to \mathbb{R}^m$ diff.le. Diciamo che $\underline{f}$ è diff.le con continuità (o che $\underline{f} \in \mathcal{C}^1(A)$) se $d\underline{f} : A \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ è continua

$$\left[\text{esplicitamente } \lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} |\!|\!| d\underline{f}(\underline{x}) - d\underline{f}(\underline{x}_0) |\!|\!| = 0 \quad \forall \underline{x}_0 \in A\right]$$

**Teorema.** $\underline{f} \in \mathcal{C}^1(A) \iff \exists\, \partial_i f_j$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ e sono continue in $A$

**Dim.** $(\Rightarrow)$ $\quad |\partial_i f_j(\underline{x}) - \partial_i f_j(\underline{x}_0)| = |\langle (d\underline{f}(\underline{x}) - d\underline{f}(\underline{x}_0))\underline{e}_i, \underline{e}_j \rangle|$

$$\text{(Schwarz)} \qquad \leq |(d\underline{f}(\underline{x}) - d\underline{f}(\underline{x}_0))\underline{e}_i|$$

$$\text{(def. di norma op.)} \qquad \leq |\!|\!| d\underline{f}(\underline{x}) - d\underline{f}(\underline{x}_0) |\!|\!|$$

$(\Leftarrow)$ $\underline{f}$ è diff.le per il teorema del diff.le totale. Inoltre

$$|\!|\!| d\underline{f}(\underline{x}) - d\underline{f}(\underline{x}_0) |\!|\!| \leq \| d\underline{f}(\underline{x}) - d\underline{f}(\underline{x}_0) \|_{HS}$$

$$= \left( \sum_{i,j} |\partial_i f_j(\underline{x}) - \partial_i f_j(\underline{y})|^2 \right)^{1/2}.$$

$\square$

# Calcolo Differenziale

## Lezione 5

### Derivate di ordine superiore

**Def.** Siano $\underline{f} : \underset{\subseteq \mathbb{R}^n}{\overset{\text{aperto}}{A}} \to \mathbb{R}^m$, $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$. Assumiamo che $\exists\, D_{\underline{w}} \underline{f}$ in $A$ e che $D_{\underline{w}} \underline{f}$ sia derivabile in $\underline{x}_0 \in A$ rispetto al vettore $\underline{v}$. Diremo allora che $\underline{f}$ possiede derivata seconda in $\underline{x}_0$ rispetto ai vettori $\underline{w}$ e $\underline{v}$ (nell'ordine!!) e poniamo

$$D^2_{\underline{v},\underline{w}} \underline{f}(\underline{x}_0) := D_{\underline{v}} \left( D_{\underline{w}} \underline{f} \right)(\underline{x}_0)$$

Se $\underline{v} = \underline{e}_i$ e $\underline{w} = \underline{e}_j$, allora $D^2_{\underline{v},\underline{w}} \underline{f}(\underline{x}_0)$ si chiama derivata parziale seconda di $\underline{f}$ in $\underline{x}_0$ rispetto a $x_j$ e $x_i$ e scriviamo

$$\frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{x}_0) \quad \text{invece di} \quad D^2_{\underline{e}_i,\underline{e}_j} \underline{f}(\underline{x}_0)$$

Ricorsivamente si definiscono le derivate di ordine superiore:

$$D^\ell_{\underline{v}_\ell,\dots,\underline{v}_1} \underline{f}(\underline{x}_0), \qquad \frac{\partial^\ell \underline{f}}{\partial x_{i_\ell} \cdots \partial x_{i_1}}(\underline{x}_0)$$

**CAVEAT:** Se esistono $D^2_{\underline{v},\underline{w}} \underline{f}(\underline{x}_0)$ e $D^2_{\underline{w},\underline{v}} \underline{f}(\underline{x}_0)$, è vero che

$$D^2_{\underline{v},\underline{w}} \underline{f}(\underline{x}_0) = D^2_{\underline{w},\underline{v}} \underline{f}(\underline{x}_0) \quad ?$$

NO!!

**Es.**

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Un calcolo diretto mostra che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = y \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Quindi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1 \neq 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0).$$

Vale il seguente criterio (di Schwarz)

**Teorema.** $\underline{f} : \underset{\subseteq \mathbb{R}^n}{\overset{\text{aperto}}{A}} \to \mathbb{R}^m$, e $\exists\, D^2_{\underline{v},\underline{w}} \underline{f}(\underline{x}_0)$, $D^2_{\underline{w},\underline{v}} \underline{f}(\underline{x}_0)$ e sono continue in $\underline{x}_0$. Allora

$$D^2_{\underline{v},\underline{w}} \underline{f}(\underline{x}_0) = D^2_{\underline{w},\underline{v}} \underline{f}(\underline{x}_0)$$

**Dim.** Omessa. Vd., ad es., [Giusti, Teorema 3.1, p. 144], [Roux, Teorema 8.1, p. 44] e, per una versione leggermente più raffinata, [Rudin, Theorem 9.41, p. 235]. $\square$

**Def.** Sia $\underline{f} : \underset{\subseteq \mathbb{R}^n}{\overset{\text{aperto}}{A}} \to \mathbb{R}^m$. Diciamo che $\underline{f} \in \mathscr{C}^{(2)}(A)$ se $\exists\, \dfrac{\partial^2 \underline{f}}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{x})$ $\forall \underline{x} \in A$, $i,j = 1,\dots,n$ e sono continue in $A$.

**Oss.** Siano $\underline{f} \in \mathscr{C}^{(2)}(A)$, $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$. Mostriamo che

$$\boxed{D^2_{\underline{v},\underline{w}} \underline{f}(\underline{x}) = \sum_{j,\ell=1}^{n} \frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial x_j \partial x_\ell}(\underline{x})\, v_j\, w_\ell}$$

Per ipotesi $\partial_\ell \underline{f}$ ammette derivate parziali continue in A. Per il teorema del differenziale totale $\partial_\ell \underline{f}$ è diff.le in A, e quindi continua A. Un'altra applicazione del teorema del diff.le totale mostra che $\underline{f}$ è diff.le in A. In particolare

$$D_{\underline{w}} \underline{f}(x) = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial \underline{f}}{\partial x_\ell}(\underline{x})\, w_\ell$$

Quindi

$$D^2_{\underline{v},\underline{w}} \underline{f}(\underline{x}) = \sum_{\ell=1}^{n} D_{\underline{v}}\left(\frac{\partial \underline{f}}{\partial x_\ell}(\underline{x})\right) w_\ell$$

$$(\text{poiché } \partial_\ell \underline{f} \text{ è diff.le}) = \sum_{\ell=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \underline{f}}{\partial x_\ell}\right)(\underline{x})\, v_j\right) w_\ell$$

$$= \sum_{j,\ell=1}^{n} \frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial x_j \partial x_\ell}(\underline{x})\, v_j\, w_\ell$$

Notiamo che l'applicazione

$$(\underline{v}, \underline{w}) \mapsto D^2_{\underline{v},\underline{w}} \underline{f}(\underline{x})$$

è una mappa bilineare da $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (ricordiamo che $\underline{f} : \underset{\subseteq \mathbb{R}^n}{A} \to \mathbb{R}^m$) ed è simmetrica per il teorema di Schwarz.

Se $m = 1$, la matrice

$$Hf(\underline{x}) := \begin{bmatrix} \partial^2_{11} f(\underline{x}) & \cdots & \partial^2_{1n} f(\underline{x}) \\ \vdots & & \\ \partial^2_{n1} f(\underline{x}) & \cdots & \partial^2_{nn} f(\underline{x}) \end{bmatrix}$$

si chiama matrice hessiana di $f$ in $\underline{x}$.

<u>N.B.</u>: La matrice hessiana di $f$ in $\underline{x}$ si può scrivere ogniqualvolta $\exists\ \partial^2_{ij} f(\underline{x})$, $i,j = 1, \dots, n$. Se $f \in \mathscr{C}^{(2)}(A)$, allora $Hf(\underline{x})$ è simmetrica in ogni punto $\underline{x} \in A$ (per il Teorema di Schwarz).

<u>Oss.</u> In analogia con il caso $k = 2$, diciamo che $\underline{f} \in \mathscr{C}^{(k)}(A)$ se $\exists\ \dfrac{\partial^k \underline{f}}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(\underline{x})\ \forall\, \underline{x} \in A$ e $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, n$ e sono continue in $A$.

Se $\underline{f} \in \mathscr{C}^{(k)}(A)$ e $\underline{x} \in A$, allora scelti comunque $\underline{v}^{(1)}, \dots, \underline{v}^{(k)}$ in $\mathbb{R}^n$

$$D^k_{\underline{v}^{(1)}, \dots, \underline{v}^{(k)}} \underline{f}(\underline{x}) = \sum_{i_1, \dots, i_k = 1}^{n} \frac{\partial^k \underline{f}}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(\underline{x})\, v^{(1)}_{i_1} \cdots v^{(k)}_{i_k}$$

L'applicazione

$$(\underline{v}^{(1)}, \dots, \underline{v}^{(k)}) \overset{\Phi_k}{\longmapsto} D^k_{\underline{v}^{(1)}, \dots, \underline{v}^{(k)}} \underline{f}(\underline{x})$$

è un'applicazione da $\underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{k \text{ fattori}} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ $k$-lineare e simmetrica, cioè

$$\Phi_k(\underline{v}^{(\sigma 1)}, \dots, \underline{v}^{(\sigma k)}) = \Phi_k(\underline{v}^{(1)}, \dots, \underline{v}^{(k)})$$

per ogni permutazione $\sigma$ di $\{1, \dots, k\}$.

Diremo che $\underline{f} \in \mathscr{C}^{\infty}(A)$ se $\underline{f} \in \mathscr{C}^{k}(A)$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Oss. Le forme

$$\underline{h} \longmapsto \Phi_k(\underline{h}, \dots, \underline{h}) = \sum_{i_1, \dots, i_k = 1}^{n} \frac{\partial^k \underline{f}}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(\underline{x}) \, h_{i_1} \cdots h_{i_k}$$

giocheranno il ruolo giocato dal termine $g^{(k)}(x) h^k$ nello sviluppo di Taylor di una funzione $g$ di una variabile. Come si vede, per $\underline{x}$ fissato in $A$, $\Phi_k(\underline{h}, \dots, \underline{h})$ è un polinomio omogeneo di grado $k$ in $n$ variabili (le componenti di $\underline{h}$).

Ex. Calcolare, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $\partial^2_{ij}(|\underline{x}|^{\alpha})$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

Def. $n \geq 2$. L'operatore differenziale

$$\Delta := \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2$$

si chiama operatore di Laplace (o laplaciano).

Ex. Calcolare $\Delta \log |\underline{x}|$ e $\Delta(|\underline{x}|^{\alpha})$. Per quali valori di $n$ e $\alpha$ le funzioni precedenti sono identicamente nulle in $\mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$?

Ex. Siano $f, g \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n)$. Dimostrare che

$$\Delta(fg) = f \Delta g + 2 \langle \nabla f, \nabla g \rangle + g \Delta f$$

# Funzioni omogenee

**Def.** Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un cono positivo (cioè $\underline{x} \in A \Rightarrow t\underline{x} \in A$ per ogni $t>0$) e $f: A \to \mathbb{R}$. Diciamo che $f$ è positivamente omogenea di grado $\alpha$ se

$$f(t\underline{x}) = t^{\alpha} f(\underline{x}) \qquad \forall \underline{x} \in A \quad \forall t>0$$

**Es.** $|\underline{x}|^{\alpha}$ è positivamente omogenea di grado $\alpha$ in $\mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$.

**Es.** $f(x,y) = \dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ è positivamente omogenea di grado 0 in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

**Oss.** Una funzione positivamente omogenea di grado 0 è costante su ogni semi-retta $\{t\underline{v} : t>0\}$; essa è completamente individuata dai valori assunti sulla sfera unitaria $\{\underline{v} \in \mathbb{R}^n : |\underline{v}|=1\}$

**Ex.** Sia $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\} \to \mathbb{R}$ positivamente omogenea di grado 0. Mostrare che

$$\exists \lim_{\underline{x} \to \underline{0}} f(\underline{x}) \iff f \text{ è costante}$$

**Ex.** Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ positivamente omogenea di grado $\alpha > 1$. Mostrare che se $f$ è limitata sulla sfera unitaria $\{\underline{v} \in \mathbb{R}^n : |\underline{v}|=1\}$, allora $f$ è diff.le in $\underline{0}$. Mostrare che la proprietà è falsa se $\alpha = 1$

Esaminiamo proprietà di diff.tà di funzioni positivamente omogenee.

**Teorema.** Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ positivamente omogenea di grado $\alpha$. Valgono:

(i) se $f$ è diff.le in $\underline{x}_0 \neq \underline{0}$, allora $f$ è diff.le in $t\underline{x}_0$, $t>0$, e
$$df(t\underline{x}_0) = t^{\alpha-1}\, df(\underline{x}_0)$$

(ii) se $\exists\, D_{\underline{v}} f(\underline{x}_0)$, allora
$$D_{\underline{v}} f(t\underline{x}_0) = t^{\alpha-1} D_{\underline{v}} f(\underline{x}_0)$$

**Dim.** (i)
$$f(t\underline{x}_0+\underline{h}) - f(t\underline{x}_0) = t^{\alpha}\left[f\left(\underline{x}_0+\frac{\underline{h}}{t}\right) - f(\underline{x}_0)\right]$$
($f$ è diff.le in $\underline{x}_0$)
$$= t^{\alpha}\left[df(\underline{x}_0)\frac{\underline{h}}{t} + o\left(\frac{\underline{h}}{t}\right)\right]$$
$$= t^{\alpha-1} df(\underline{x}_0)\underline{h} + o(\underline{h})$$

(ii)
$$\frac{f(t\underline{x}_0+s\underline{v}) - f(t\underline{x}_0)}{s} = t^{\alpha-1}\,\frac{f\left(\underline{x}_0+\frac{s}{t}\underline{v}\right) - f(\underline{x}_0)}{\frac{s}{t}}$$
$$\to t^{\alpha-1} D_{\underline{v}} f(\underline{x}_0).$$

□

**Teorema** (Eulero) Sia $f : \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\} \to \mathbb{R}$ diff.le. Allora

$f$ è positivamente omogenea di grado $\alpha$

$$\Updownarrow$$

$$(*) \qquad df(\underline{x})\cdot\underline{x} = \alpha f(\underline{x}) \qquad \forall\, \underline{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$$

**Dim** $\Downarrow$ Fissato $\underline{x} \neq 0$, poniamo $\varphi_{\underline{x}}(t) = \dfrac{f(t\underline{x})}{t}$ $\forall t>0$.

Poiché $f$ è positivamente omogenea di grado $\alpha$, $\varphi_{\underline{x}}$ è costante in $t>0$. Perciò

$$0 = \varphi_{\underline{x}}'(t) = \frac{t^{\alpha} df(t\underline{x})\cdot\underline{x} - \alpha t^{\alpha-1} f(t\underline{x})}{t^{2\alpha}}$$

Posto $t=1$, si ottiene (*).

$\Uparrow$ Se $\varphi_{\underline{x}}$ è come sopra

$$\varphi_{\underline{x}}'(t) = \frac{1}{t^{\alpha+1}} \left[ df(t\underline{x})\, t\underline{x} - \alpha f(t\underline{x}) \right]$$

$$= 0 \qquad \forall t>0$$

$\Rightarrow$ $\varphi_{\underline{x}}(t)$ è costante in $(0,\infty)$ (e quindi uguale a $\overbrace{\varphi_{\underline{x}}(1)}^{=f(\underline{x})}$).

$\square$

## Polinomi omogenei

Un polinomio omogeneo di grado $k$ in $\mathbb{R}^n$ è una funzione della forma

$$P(\underline{x}) = \sum_{|\alpha|=k} c_{\alpha}\, \underline{x}^{\alpha}$$

dove $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ (multi-indice), $\alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_n \geq 0$, $\alpha_j \in \mathbb{N}$

$$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_k \quad \text{(lunghezza del multi-indice)}$$

$$\underline{x}^{\alpha} := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

Ad es.: $P(x,y) = xy^3 - 2x^2y^2 + 3y^4$ è un polinomio omogeneo di grado 4 in $\mathbb{R}^2$.

Lo studio dei polinomi omogenei è importante, in vista della formula di Taylor.

Oss. Sia $P$ un polinomio omogeneo di grado $k$ in $\mathbb{R}^n$

Se $P(\underline{x}_0) \neq 0$ allora $t \mapsto P(t\underline{x}_0)$ non cambia segno in un intorno di $0$ se e solo se $k$ è pari

Inoltre, se $P$ si annulla solo in $\underline{0}$, allora esistono $0 < m \leq M < \infty$ t.c.

$$m \leq \frac{|P(\underline{x})|}{|\underline{x}|} \leq M.$$

Infatti $\underline{x} \mapsto \dfrac{|P(\underline{x})|}{|\underline{x}|}$ è una funzione continua e strettamente positiva sulla sfera unitaria

Ex. Quali tra le relazioni seguenti sono vere?

$x = o(|(x,y)|)$ $\qquad |(x,y)| = O(|x|)$

$3x^2 - y^2 = O(|(x,y)|^2)$ $\qquad |(x,y)| \lesssim 3x^2 + y^2$

$y^4 = o(x^5)$ $\qquad x^5 = o(y^4)$

# Calcolo Differenziale

## Lezione 6

### Formula di Taylor

**Teorema** Siano $f \in \mathscr{C}^{(k+1)}(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $\underline{x}_0 \in A$.

Allora, per $\underline{h}$ piccolo,

$$f(\underline{x}_0+\underline{h}) = \overbrace{f(\underline{x}_0) + \sum_{\ell=1}^{k} \frac{P_\ell(\underline{h})}{\ell!}}^{\text{polinomio di Taylor di grado } k \text{ centrato in } \underline{x}_0} + \underbrace{R_k(\underline{x}_0;\underline{h})}_{\text{resto}}$$

dove

$$P_\ell(\underline{h}) = \sum_{j_\ell,\dots,j_1=1}^{n} \frac{\partial^\ell f(\underline{x}_0)}{\partial x_{j_\ell}\dots\partial x_{j_1}} h_{j_\ell}\cdots h_{j_1}$$

e

$$\underbrace{R_k(\underline{x}_0;\underline{h})}_{\text{in forma di Lagrange}} = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{j_{k+1},\dots,j_1=1}^{n} \frac{\partial^{k+1} f(\underline{x}_0+\theta\underline{h})}{\partial x_{j_{k+1}}\dots\partial x_{j_1}} h_{j_{k+1}}\cdots h_{j_1}$$

per un opportuno $\theta \in (0,1)$.

**Oss.** Sia $M$ t.c.

$$\max_{|\underline{h}|=1} \max_{t\in[0,\varepsilon]} \left| \frac{\partial^{k+1} f(\underline{x}_0+t\underline{h})}{\partial x_{j_{k+1}}\dots\partial x_{j_1}} \right| \leq M$$

per ogni $j_{k+1},\dots,j_1 \in \{1,\dots,n\}$. Allora

$$|R_k(\underline{x}_0;\underline{h})| \leq \frac{M}{(k+1)!} |Q(\underline{h})|,$$

dove $Q$ è un polinomio omogeneo di grado $k+1$.

Quindi $\dfrac{|Q(\underline{h})|}{|\underline{h}|^{k+1}}$ è una f.ne continua in $\mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$

è omogenea di grado 0, dunque limitata. Perciò esiste $c>0$, indipendente da $\underline{h}$, t.c.

$$|R_K(\underline{x}_0; \underline{h})| \leq c\, |\underline{h}|^{K+1} \qquad \forall \underline{h} : \ |\underline{h}| \leq \varepsilon .$$

In particolare

$$R_K(\underline{x}_0; \underline{h}) = o(|\underline{h}|^K) \qquad \text{per } \underline{h} \to \underline{0} .$$

<u>Oss</u>. Se $k=3$ e $n=2$ la formula si può scrivere

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) = \partial_x f(x_0,y_0)\, h + \partial_y f(x_0,y_0)\, k$$
$$+ \frac{1}{2}\left[ \partial_x^2 f(x_0,y_0)\, h^2 + 2\, \partial_{xy}^2 f(x_0,y_0)\, hk \right.$$
$$\left. + \partial_y^2 f(x_0,y_0)\, k^2 \right] + o(h^2+k^2)$$

Notiamo che il termine $[\dots]$ è la forma quadratica associata alla matrice hessiana:

$$(h,k)\ Hf(x_0,y_0) \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$$

<u>Dim</u>. Poniamo $\varphi_{\underline{h}}(t) := f(\underline{x}_0 + t\underline{h})$. allora $\exists\, \theta \in (0,1)$ t.c.

$$\varphi_{\underline{h}}(1) = \varphi_{\underline{h}}(0) + \sum_{\ell=1}^{K} \frac{\varphi_{\underline{h}}^{(\ell)}(0)}{\ell!} + \varphi_{\underline{h}}^{(\ell+1)}(\theta) \cdot \frac{1}{(\ell+1)!}$$

La dimostrazione si completa provando che

$$\varphi_{\underline{h}}^{(\ell)}(t) = \sum_{j_\ell,\dots,j_1=1}^{n} \partial^\ell_{j_\ell,\dots,j_1} f(\underline{x}_0 + t\underline{h})\, h_{j_\ell} \dots h_{j_1} .$$

Si procede ricorsivamente utilizzando il teorema di derivazione delle funzioni composte:

$$\varphi_{\underline{h}}'(t) = df(\underline{x}_0+t\underline{h}) \cdot \underline{h} = \sum_{j_1=1}^{n} \partial_{j_1} f(\underline{x}_0+t\underline{h})\, h_{j_1}$$

$$\varphi''_{\underline{h}}(t) = \sum_{j_1=1}^{n} \left( \sum_{j_2=1}^{n} \partial_{j_2} (\partial_{j_1} f)(\underline{x}_0 + t\underline{h}) \, h_{j_2} \right) h_{j_1}$$

$$= \sum_{j_1, j_2 = 1}^{n} \partial^2_{j_2 j_1} f(\underline{x}_0 + t\underline{h}) \, h_{j_2} h_{j_1}$$

$; \dots .$

$\square$

Es. Lo sviluppo di Taylor di $f(x,y) = (x+y)\sin y$ arrestato al terzo ordine nel pto $(0, \pi/2)$ è

$$f(x,y) = \frac{\pi}{2} + x + \left(y - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{4}\left(y-\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(y-\frac{\pi}{2}\right)^3$$
$$- \frac{1}{2} x \left(y - \frac{\pi}{2}\right)^2 + o\left( \left(x^2 + \left(y-\frac{\pi}{2}\right)^2\right)^{3/2} \right)$$

Ex. Sia $p$ un polinomio di grado $k$ in $\mathbb{R}^n$. Mostrare che $p$ coincide con il suo polinomio di Taylor di grado $k$

Notazione. $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_n \geq 0$, $\alpha_j$ intero. multi-indice. Poniamo

$$D^{\alpha} f(\underline{x}_0) := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(\underline{x}_0) \quad e \quad \alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!$$

Supponiamo $n=2$. Allora, se $f \in \mathcal{C}^{(3)}(\mathbb{R}^2)$

$$D^{(1,2)} f(x_0, y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x_0, y_0)$$

$$= \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

In generale, dato $\alpha$ e $f \in \mathscr{C}^{|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$, ci sono

$$\frac{|\alpha|!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!}$$ derivate parziali di ordine $|\alpha|$

uguali a $D^\alpha f$. Tenuto conto di quest'osservazione la formula di Taylor si può riscrivere

$$(*) \quad \boxed{f(\underline{x}_0+\underline{h}) = f(\underline{x}_0) + \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{|\alpha|=\ell} \frac{D^\alpha f(\underline{x}_0)}{\alpha!} \underline{h}^\alpha + \overset{o(\|\underline{h}\|^k)}{\overset{\shortparallel}{R_k(\underline{x}_0;\underline{h})}}}$$

Oss. Non abbiamo fino ad ora definito il concetto di funzione 2-volte diff.le in un punto. È un concetto delicato che svilupperemo in seguito.

Corollario (formula di Taylor, $m>1$) Siano $\underline{f}: \underset{\subseteq \mathbb{R}^n}{\overset{\text{aperto}}{A}} \to \mathbb{R}^m$, $\underline{x}_0 \in A$, $\underline{f} \in \mathscr{C}^{(k+1)}(A)$. Allora, per $\underline{h}$ piccolo,

$$\underline{f}(\underline{x}_0+\underline{h}) = \underline{f}(\underline{x}_0) + \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{|\alpha|=\ell} \frac{D^\alpha \underline{f}(\underline{x}_0)}{\alpha!} \underline{h}^\alpha + o(\|\underline{h}\|^k).$$

Dim. Segue applicando $(*)$ a ogni componente di $\underline{f}$. $\square$

# CALCOLO DIFFERENZIALE

## LEZIONE 7

### Estremi liberi

**Problema:** $f : \underset{\subseteq \mathbb{R}^n}{\overset{\text{aperto}}{A}} \longrightarrow \mathbb{R}$ "regolare", determinare i pti di minimo e massimo locale di $f$ (in $A$)

**Teorema** (Condizione necessaria del I° ordine) $f : \underset{\subseteq \mathbb{R}^n}{\overset{\text{aperto}}{A}} \to \mathbb{R}$ diff.le in $A$. Se $\underline{x}_0 \in A$ è p.to di min o max locale di $f$, allora

$$(*) \qquad df(\underline{x}_0) = 0 .$$

**Dim.** La restrizione di $f$ alla retta $t \mapsto \underline{x}_0 + t\underline{v}$ ha un min o max in 0. Perciò

$$\frac{d}{dt} f(\underline{x}_0 + t\underline{v})\Big|_{t=0} = 0,$$

da cui

$$df(\underline{x}_0)\,\underline{v} = 0 \qquad \forall \underline{v} \in \mathbb{R}^n.$$

Quindi $df(\underline{x}_0) = 0$ $\square$

N.B.: i punti di estremo di $f$ vanno ricercati tra le sol. del sistema

$$\begin{cases} \partial_1 f(\underline{x}) = 0 \\ \vdots \\ \partial_n f(\underline{x}) = 0 \end{cases}$$

**Def.** Un punto $\underline{x}_0$ t.c. $df(\underline{x}_0) = 0$ si chiama **punto stazionario** di $f$.

**Es.** $f(x,y,z) = y^2(x - e^x)^2 + y^2 + z^2$

$$df(x,y,z) = 0 \iff \begin{cases} 2y^2(x-e^x)(1-e^x) = 0 \\ 2y\,(x-e^x)^2 + 2y = 0 \\ 2z = 0 \end{cases}$$

che ha soluzioni $(a, 0, 0)$, $a \in \mathbb{R}$. Poiché

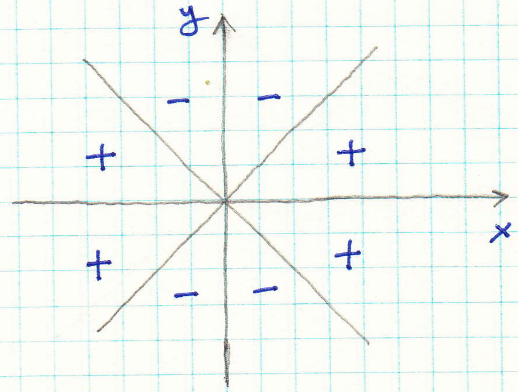
$$f \geqslant 0 \quad \text{e} \quad f(a,0,0) = 0$$

i pti $(a,0,0)$ sono pti di minimo.

**Es.** $f(x,y) = x^2 - y^2$

$$df(x,y) = 0 \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \iff (x,y) = (0,0)$$

Poiché $f(0,0) = 0$ e $f$ ha il segno in figura, $(0,0)$ non è un punto di estremo




**Def.** Un punto $\underline{x}_0$ che sia stazionario per $f$ e che non sia di estremo si chiama **punto di sella**.

**Ex.** (Condizione necessaria di ordine qualunque) Siano $f \in \mathscr{C}^{(k+1)}(A)$, $A$ aperto, $\underline{x}_0 \in A$. Supponiamo che $\underline{x}_0$ sia un punto di estremo di $f$ e che

$$D^\alpha f(\underline{x}_0) = 0 \qquad \forall \alpha : \ |\alpha| \leq k-1.$$

Se $\exists \alpha : \ |\alpha| = k$ e $D^\alpha f(\underline{x}_0) \neq 0$, allora

(i) $k$ è pari

(ii) posto $\Phi_{f,k}(\underline{x}_0; \underline{h}) := \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha f(\underline{x}_0)}{\alpha!} \underline{h}^\alpha$ si ha

$$\Phi_{f,k}(\underline{x}_0; \underline{h}) \leq 0 \quad \forall \underline{h} \qquad \text{se } \underline{x}_0 \text{ è pto di max}$$

$$\Phi_{f,k}(\underline{x}_0; \underline{h}) \geq 0 \quad \forall \underline{h} \qquad \text{se } \underline{x}_0 \text{ è pto di min}$$

**Es.** $f(x,y) = x^2 + y^4$; $(0,0)$ è pto di min. forte

$$\Phi_{f,2}((0,0); (h,k)) = h^2$$

$$\geq 0$$

(nell'Ex. precedente non si può sostituire $\geq 0$ con $>0$ nemmeno se $\underline{x}_0$ è min forte)

## Estremi delle forme quadratiche

Siano $A$ una matrice $n \times n$ simmetrica e

$$q(\underline{x}) := \langle A\underline{x}, \underline{x} \rangle$$

la forma quadratica associata.

Ricordiamo che

$$dq(\underline{x}) = 2A\underline{x}.$$

Perciò $\underline{x}_0$ è stazionario $\Longleftrightarrow$ $\underline{x}_0 \in \operatorname{Ker} A$

Analizziamo il caso $\underline{x}_0 = \underline{0}$

Ex. Nelle ipotesi precedenti mostrare che l'analisi di un punto $\underline{x}_0 \in \operatorname{Ker} A \setminus \{\underline{0}\}$ si può ricondurre all'analisi di $\underline{x}_0 = \underline{0}$

Sviluppando con Taylor, abbiamo

$$q(\underline{h}) = q(\underline{0}) + \langle \nabla q(\underline{0}), \underline{h} \rangle + \frac{1}{2} \langle Hq(\underline{0})\underline{h}, \underline{h} \rangle$$

($q$ è un polinomio di grado due $\Rightarrow$ $q$ coincide con il suo polinomio di Taylor di grado due)

$$= \langle A\underline{h}, \underline{h} \rangle$$

Quindi $Hq(\underline{0}) = 2A$ e abbiamo

$\underline{0}$ è pto di min $\Longleftrightarrow$ $\langle A\underline{h}, \underline{h} \rangle \geq 0 \quad \forall \underline{h}$ ($\Longleftrightarrow$ $A$ è semi-definita positiva)

$\underline{0}$ è pto di max $\Longleftrightarrow$ $\langle A\underline{h}, \underline{h} \rangle \leq 0 \quad \forall \underline{h}$ ($\Longleftrightarrow$ $A$ è semi-definita negativa)

$\underline{0}$ è pto di sella $\Longleftrightarrow$ $\exists\, \underline{h}^{(1)}, \underline{h}^{(2)}$ t.c. $\langle A\underline{h}^{(1)}, \underline{h}^{(1)} \rangle > 0$ e $\langle A\underline{h}^{(2)}, \underline{h}^{(2)} \rangle < 0$ ($\Longleftrightarrow$ $A$ è indefinita)

**Teorema** (condizione sufficiente del II° ordine) $f \in \mathcal{C}^3(A)$, $\underline{x}_0 \in A$, stazionario per $f$. Posto $\Phi_{f,2}(\underline{x}_0; \underline{h}) := \frac{1}{2}\langle Hf(\underline{x}_0)\underline{h}, \underline{h}\rangle$

(i) se $\Phi_{f,2}(\underline{x}_0; \underline{h}) > 0 \quad \forall \underline{h} \neq \underline{0}$, allora $\underline{x}_0$ è un pto di min. forte

(ii) se $\Phi_{f,2}(\underline{x}_0; \underline{h}) < 0 \quad \forall \underline{h} \neq \underline{0}$, allora $\underline{x}_0$ è un pto di max. forte

(iii) se $\exists\, \underline{h}^{(1)}, \underline{h}^{(2)}$ t.c. $\Phi_{f,2}(\underline{x}_0; \underline{h}^{(1)}) > 0$ e $\Phi_{f,2}(\underline{x}_0; h^{(2)}) < 0$, allora $\underline{x}_0$ è un punto di sella.

**Dim.** Sviluppando con Taylor

$$f(\underline{x}_0 + \underline{h}) - f(\underline{x}_0) = \Phi_{f,2}(\underline{x}_0; \underline{h}) + o(|\underline{h}|^2)$$

$$= |\underline{h}|^2 \left[ \Phi_{f,2}\left(\underline{x}_0; \frac{\underline{h}}{|\underline{h}|}\right) + o(1) \right]$$

Nel caso (i), $\exists\, m, M$ t.c. $0 < m \leq \Phi_{f,2}\left(\underline{x}_0; \frac{\underline{h}}{|\underline{h}|}\right) \leq M \quad \forall \underline{h}$, perché $\Phi_{f,2}(\underline{x}_0; \cdot)$ è continua e strettamente positiva sulla sup. sferica unitaria. Per $\underline{h}$ sufficientemente piccolo

$$|o(1)| \leq \frac{m}{2}.$$

Perciò, per tali $\underline{h}$,

$$f(\underline{x}_0 + \underline{h}) - f(\underline{x}_0) \geq \frac{m}{2}|\underline{h}|^2$$

$$> 0 \qquad \underline{h} \neq \underline{0},$$

cioè $\underline{x}_0$ è un pto di minimo forte.

Si ragiona in modo analogo nel caso (ii).

Nel caso (iii), abbiamo

$$f(\underline{x}_0 + t\underline{h}^{(1)}) - f(\underline{x}_0) = \Phi_{f,2}(\underline{x}_0; t\underline{h}^{(1)}) + o(|t\underline{h}^{(1)}|^2)$$

$$= t^2 \left[ \Phi_{f,2}(\underline{x}_0; \underline{h}^{(1)}) + o(1) \right]$$

Pur di prendere $t$ sufficientemente prossimo a $0$

$$|o(1)| \leq \frac{1}{2} \Phi_{f,2}(\underline{x}_0; \underline{h}^{(1)}),$$

cosicché, per $t$ vicino a $0$,

$$f(\underline{x}_0 + t\underline{h}^{(1)}) - f(\underline{x}_0) \geq \frac{t^2}{2} \Phi_{f,2}(\underline{x}_0; \underline{h}^{(1)})$$

$$\geq 0.$$

Analogamente, per $t$ vicino a $0$,

$$f(\underline{x}_0 + t\underline{h}^{(2)}) - f(\underline{x}_0) \leq 0.$$

Quindi $\underline{x}_0$ è pto di sella. $\square$

**Corollario.** $f \in \mathscr{C}^3(A)$, $\underline{x}_0 \in A$ stazionario per $f$.

(i) Se $Hf(\underline{x}_0)$ è definita positiva, allora $\underline{x}_0$ è pto di minimo forte

(ii) Se $Hf(\underline{x}_0)$ è definita negativa, allora $\underline{x}_0$ è pto di massimo forte

(iii) Se $Hf(\underline{x}_0)$ è indefinita, allora $\underline{x}_0$ è pto di sella.

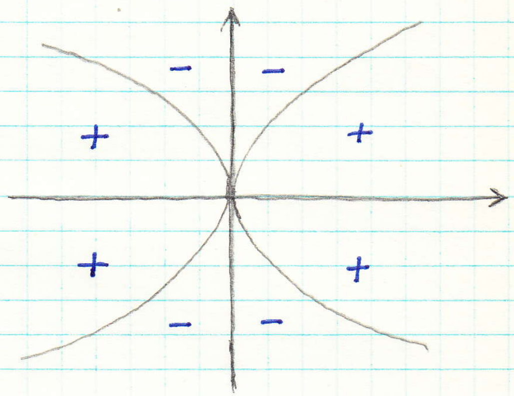
Oss. Nelle ipotesi del Corollario,

$$Hf(\underline{x}_0) \geq 0 \not\Rightarrow \underline{x}_0 \text{ pto di minimo}$$

Ad esempio, $f(x,y) = x^2 - y^4$. Abbiamo $(0,0)$ stazionario,

$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{semidefinita positiva,}$$

ma $(0,0)$ è pto di sella




Il caso $\underline{x}_0$ stazionario, $Hf(\underline{x}_0)$ semidefinita (positiva o negativa) viene, a volte, detto caso ambiguo, e $\underline{x}_0$ pto stazionario degenere.

Ex. (Condizione sufficiente di ordine qualunque) Siano $f \in \mathscr{C}^{(k+1)}(A)$, $A$ aperto, $\underline{x}_0 \in A$. Supponiamo che

$$D^\alpha f(\underline{x}_0) = 0 \qquad \forall \alpha : \ |\alpha| \leq k-1.$$

(i) se ($k$ è pari e)

$$\Phi_{f,k}(\underline{x}_0; \underline{h}) < 0 \qquad \forall \underline{h} \neq \underline{0},$$

allora $\underline{x}_0$ è pto di max forte

(ii) se ($k$ è pari e)

$$\Phi_{f,k}(\underline{x}_0; \underline{h}) > 0 \qquad \forall \underline{h} \neq \underline{0},$$

allora $\underline{x}_0$ è p.to di minimo forte.

Per poter utilizzare il Corollario precedente è necessario determinare la segnatura della forma quadratica associata a $Hf(\underline{x}_0)$.

**Notazione** Poniamo

$$d_1 := \partial^2_{11} f \qquad d_2 := \det \begin{bmatrix} \partial^2_{11} f & \partial^2_{12} f \\ \partial^2_{21} f & \partial_{22} f \end{bmatrix} \quad \dots \quad d_n := \det Hf ;$$

$d_1, d_2, \dots, d_n$ sono i determinanti dei minori principali di nord-ovest.

**Teorema** La forma quadratica associata a $Hf(\underline{x}_0)$ è

(i) definita positiva $\Leftrightarrow$ $d_j(\underline{x}_0) > 0 \quad j = 1, \dots, n$

(ii) definita negativa $\Leftrightarrow$ $(-1)^j d_j(\underline{x}_0) > 0 \quad j = 1, \dots, n$

**Corollario** $f \in \mathscr{C}^3(A)$, $\underline{x}_0 \in A \subseteq \mathbb{R}^2$ punto stazionario per $f$

(i) se $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ e $\det Hf(x_0, y_0) > 0$, allora $(x_0, y_0)$ è p.to di minimo forte

(ii) se $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$ e $\det Hf(x_0, y_0) < 0$, allora $(x_0, y_0)$ è p.to di massimo forte

**Es.** $f(x,y) = 2y^2 - x(x-1)^2$

I punti critici sono $(1/3, 0)$ e $(1,0)$. Poiché

$$\partial^2_{11} f(x,y) = 4 - 6x, \quad \partial^2_{22} f(x,y) = 4, \quad \det Hf(x,y) = 16 - 24x,$$

abbiamo che $(1/3, 0)$ è un pto di minimo forte e $(1,0)$ è un pto di sella $(\det Hf(1,0) = -8)$

# CALCOLO DIFFERENZIALE

## LEZIONE 8

### Funzioni implicite: caso $n=2$, $m=1$

<u>Def.</u> Siano $I, J$ due intervalli di $\mathbb{R}$ e $f: I \times J \to \mathbb{R}$.
Una funzione $\varphi: \underset{\subseteq I}{I'} \to J$ si dice implicitamente definita dall'equazione

$$f(x,y) = 0$$

se

$$f(x, \varphi(x)) = 0 \qquad \forall x \in I'$$

[ Similmente $\psi: \underset{\subseteq J}{J'} \to I$ si dice ... ]

<u>Es.</u> 1 $\quad I = J = \mathbb{R}$, $\quad f(x,y) = x^2 + y^2 + 1 = 0$ non definisce alcuna f.ne implicita

<u>Es.</u> 2 $\quad I = J = \mathbb{R}$ $\quad f_{a,b}(x,y) = ax + by = 0$ definisce, se $b \neq 0$, un'unica funzione implicita $y = \varphi(x)$, e cioè

$$\varphi(x) = -\frac{a}{b} x \qquad \forall x \in I$$

e definisce, se $a \neq 0$, un'unica funzione implicita $x = \psi(y)$, e cioè

$$\psi(y) = -\frac{b}{a} y \qquad \forall y \in J$$

Notiamo che $\quad a = \dfrac{\partial f_{a,b}}{\partial x}$ e $b = \dfrac{\partial f_{a,b}}{\partial y}$

**Es. 3** $\quad I = J = \mathbb{R} \quad f(x,y) = e^y - x = 0$ definisce un'unica funzione implicita $y = \varphi(x)$. e cioè

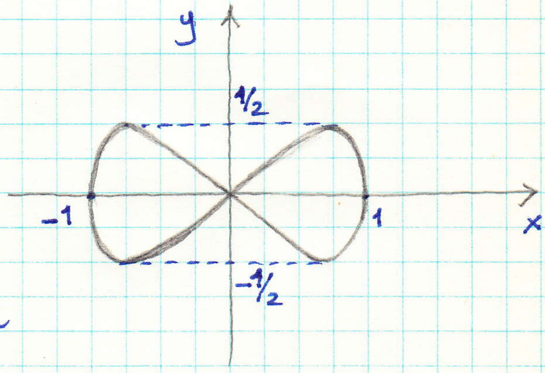
$$y = \log x \qquad \forall x \in (0, \infty)$$

e definisce un'unica funzione implicita $x = \psi(y)$ e cioè

$$\psi(y) = e^y \qquad \forall y \in \mathbb{R}$$

**Es. 4** $\quad I = J = \mathbb{R} \quad f(x,y) = y^2 - x^2(1-x^2)$

Il luogo degli zeri di $f$ è indicato in figura ed è l'unione dei grafici di




$$\varphi_1(x) = |x| \sqrt{1-x^2}$$

$$\varphi_2(x) = -|x| \sqrt{1-x^2}$$

È anche l'unione dei grafici di

$$\varphi_3(x) = x\sqrt{1-x^2} \qquad \varphi_4(x) = -x\sqrt{1-x^2}$$

Notiamo che il luogo degli zeri di $f$ non è rappresentabile in alcun intorno di $(0,0)$ come il grafico di una funzione $y = \varphi(x)$ [né come il grafico di una funzione $x = \psi(y)$]

Supponiamo che $f(x_0, y_0) = 0$, $(x_0, y_0) \neq (0,0)$

(i) se $x_0 \neq \mp 1$, esiste un intorno $U$ di $(x_0, y_0)$ t.c.

$$\{(x,y) \in U : \; f(x,y) = 0\}$$

è il grafico di una funzione $y = \varphi(x)$ ed è altresì il grafico di una funzione $x = \psi(y)$.

(ii) se $x_0 = -1$ oppure $x_0 = 1$, allora esiste un intorno $U$ di $(x_0, y_0)$ t.c.

$$(*) \qquad \{(x,y) \in U : f(x,y) = 0\}$$

è il grafico di una funzione $x = \psi(y)$, ma nessun $U$ per cui $(*)$ è il grafico di una funzione $y = \varphi(x)$

Notiamo che

$$\partial_x f(0,0) = 0 = \partial_y f(0,0)$$

$$\partial_x f(\mp 1, 0) = 0 \neq \mp 2 = \partial_y f(\mp 1, 0)$$

<u>Problema:</u> data $f : I \times J \to \mathbb{R}$, dare condizioni sufficienti su $f$ affinché l'equazione $f(x,y) = 0$ definisca un'unica funzione implicita $y = \varphi(x)$ [risp. $x = \psi(y)$]

Risultati di esistenza e unicità

**in grande:** $\varphi$ [risp. $\psi$] è definita in tutto $I$ [risp. $J$]

**in piccolo:** $\varphi$ [risp. $\psi$] è definita in un intorno $I'$ [risp. $J'$] di un punto $x_0$ [risp. $y_0$] t.c. $f(x_0, y_0) = 0$

**Teorema** (esistenza e unicità in grande) I, J intervalli (aperti) di $\mathbb{R}$, $f: I \times J \to \mathbb{R}$. Supponiamo che

IP1) per ogni $x \in I$ la f.ne $J \ni y \mapsto f(x,y)$ sia continua e strettamente crescente in J

IP2) per ogni $x \in I$

$$\lim_{y \to b_1^+} f(x,y) < 0 \qquad \lim_{y \to b_2^-} f(x,y) > 0$$

(qui $b_1$ e $b_2$ sono gli estremi dell'intervallo J)

Valgono:

(i) l'eq. $f(x,y) = 0$ definisce un'unica funzione $\varphi: I \to J$ tale che

$$f(x, \varphi(x)) = 0 \qquad \forall x \in I$$

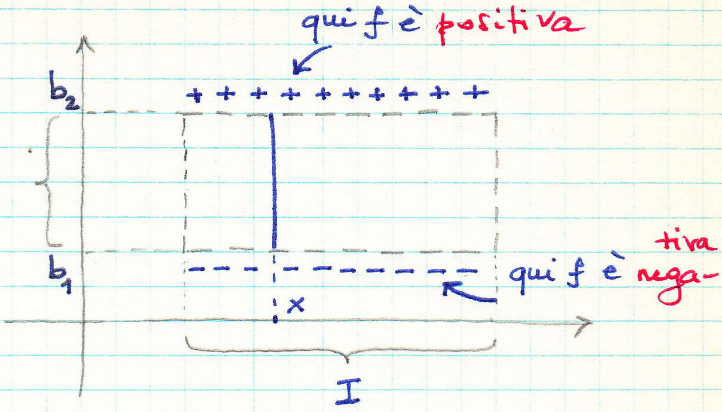
(ii) se $f$ è continua in $I \times J$, allora la f.ne $\varphi$ in (i) è continua in I

(iii) se $f$ è diff.le in $I \times J$ e $\partial_y f \neq 0$ in $I \times J$, allora la f.ne $\varphi$ in (i) è diff.le in I e

$$\varphi'(x) = -\frac{\partial_x f(x, \varphi(x))}{\partial_y f(x, \varphi(x))} \qquad \forall x \in I$$

**Dim.** (i) La f.ne $J \ni y \mapsto f(x,y)$ è continua, ha limite negativo nell'estremo sinistro $b_1$ di J e limite positivo nell'estremo destro $b_2$ di J. Per il Teorema degli zeri essa ha almeno uno zero in J. Poiché $y \mapsto f(x,y)$

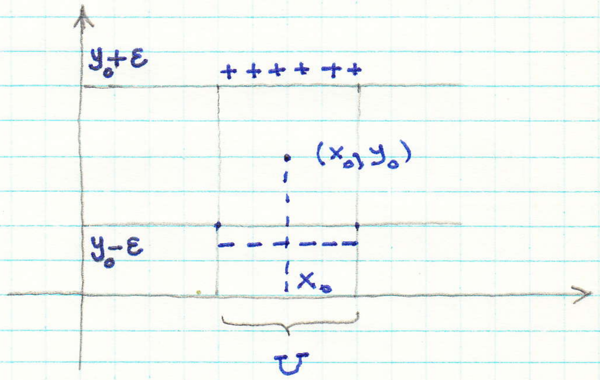
è strettamente crescente in $J$, tale zero è unico. Lo denotiamo $\varphi(x)$. Per costruzione $\varphi$ ha le proprietà richieste.




(ii) Siano $(x_0, y_0)$ t.c. $f(x_0, y_0) = 0$ e $\varepsilon > 0$ fissato. Per IP 1),

$$f(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0 \qquad f(x_0, y_0 + \varepsilon) > 0$$

Poiché $f$ è continua in $(x_0, y_0 - \varepsilon)$, esiste un intorno $U_1$ di $x_0$ t.c. $f(x, y_0 - \varepsilon) < 0$ $\forall x \in U_1$. Similmente, esiste un intorno $U_2$ di $x_0$ t.c. $f(x, y_0 + \varepsilon) > 0$ $\forall x \in U_2$. Sia $U := U_1 \cap U_2$. La situazione è descritta in figura.




Evidentemente per ogni $x \in U$ si ha $\varphi(x) \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$. Quindi, assegnato $\varepsilon > 0$ abbiamo determinato un intorno $U$ di $x_0$ t.c.

$$|\varphi(x) - \underbrace{\varphi(x_0)}_{= y_0}| < \varepsilon \qquad \forall x \in U,$$

cioè $\varphi$ è continua in $x_0$.

(iii) Siano $x_0, x_0 + h \in I$. Poiché $f$ è diff.le in $x_0$,

$$0 = f(x_0+h, \varphi(x_0+h)) - f(x_0, y_0)$$

(**)
$$= df(x_0, y_0)\left(h, \varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)\right) + o\left(\left|(h, \varphi(x_0+h)-\varphi(x_0))\right|\right)$$

Poniamo, per comodità, $k := \varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)$

Mostreremo che $\exists\, \lambda > 0\ \exists\, \delta > 0$ t.c.

(*) $\qquad |k| \leq \lambda |h| \qquad \forall h \in (-\delta, \delta).$

Assumendo di aver dimostrato (*), abbiamo

$$\left|(h, \varphi(x_0+h)-\varphi(x_0))\right| \leq \sqrt{1+\lambda^2}\, |h| \qquad \forall h \in (-\delta, \delta)$$

e quindi $o\left(\left|(h, \varphi(x_0+h)-\varphi(x_0))\right|\right) = o(h)$ per $h \to 0$.
Dividendo allora ambo i membri di (**) per $h$ e facendo il limite per $h \to 0$ otteniamo

$$0 = df(x_0, y_0)\left(1, \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h}\right)$$

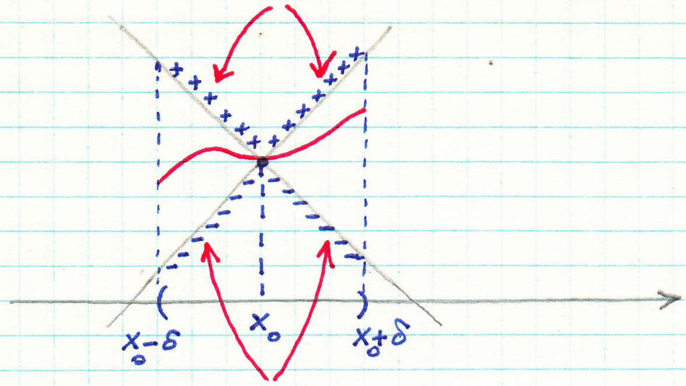
Quindi $\varphi'(x_0)$ esiste (poiché $\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$),

$$0 = \partial_x f(x_0, y_0) + \partial_y f(x_0, y_0)\, \varphi'(x_0),$$

da cui, essendo $\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$, si ricava la formula per $\varphi'(x_0)$ richiesta.

Rimane da dimostrare (*). Sia $\sigma > 0$ e valutiamo il segno di $f$ sulle rette $y = y_0 \pm \sigma(x - x_0)$ (vd. figura) quando $x$ varia in un intorno di $x_0$:

$$f(x, y_0 \pm \sigma(x-x_0)) = f(x, y_0 \pm \sigma(x-x_0)) - f(x_0, y_0)$$




$$= (x-x_0)\,\partial_x f(x_0,y_0) \pm \sigma (x-x_0)\,\partial_y f(x_0,y_0) + o(x-x_0)$$

$$= (x-x_0)\left[\partial_x f(x_0,y_0) \pm \sigma\,\partial_y f(x_0,y_0) + o(1)\right]$$

Scegliamo $\sigma$ così grande che

$$\partial_x f(x_0,y_0) + \sigma\,\partial_y f(x_0,y_0) \geqslant 2\,\partial_y f(x_0,y_0)$$

e, di conseguenza, $x$ così vicino a $x_0$ che

$$|o(1)| \leqslant \partial_y f(x_0,y_0) \qquad \forall x \text{ vicino a } x_0$$

Abbiamo quindi che esiste $\delta>0$ t.c.

$$f(x, y_0+\sigma(x-x_0)) \begin{cases} \geqslant (x-x_0)\,\partial_y f(x_0,y_0) & \forall x\in(x_0,x_0+\delta) \\ \leqslant (x-x_0)\,\partial_y f(x_0,y_0) & \forall x\in(x_0-\delta,x_0) \end{cases}$$

provando così che, in prossimità di $x_0$, sulla retta $y=y_0+\sigma(x-x_0)$ la funzione $f$ ha il segno indicato in figura. In modo analogo si procede per lo studio del segno di $f$ sulla retta $y=y_0-\sigma(x-x_0)$ in prossimità di $x_0$.

Ne consegue che il grafico della restrizione di $\varphi$ a $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ è compreso tra le rette $y = y_0 \pm \sigma(x-x_0)$ e quindi

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)| \leq \sigma\,|x-x_0| \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta),$$

concludendo così la dimostrazione di (*)

$\square$

<u>Ex.</u> Determinare per quali valori dei parametri $\lambda, \mu, \nu, a, b$ l'equazione

$$f(x,y) = \lambda x^2 + 2\mu xy + \nu y^2 + ax + by = 0$$

definisce una e una sola funzione implicita in un intorno di $(0,0)$.

<u>Oss.</u> Ovviamente nel Teorema di esistenza e unicità in grande <u>è possibile scambiare i ruoli delle variabili</u> $x$ <u>e</u> $y$

<u>Oss.</u> Se $f$ è come nel Teorema di esistenza e unicità in grande (iii) e, in aggiunta, $f \in \mathscr{C}^k(I \times J)$, allora la fnz $\varphi$, implicitamente definita dall'eq. $f(x,y)=0$ è di classe $\mathscr{C}^k(I)$, in virtù della formula

$$\varphi'(x) = -\frac{\partial_x f(x,\varphi(x))}{\partial_y f(x,\varphi(x))}.$$

Se $k=2$, abbiamo

$$\varphi''(x) = -\Big[\big(\partial^2_{xx} f(x,\varphi(x)) + \partial^2_{xy} f(x,\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\big)\partial_y f(x,\varphi(x)) - \partial_x f(x,\varphi(x))\big(\partial^2_{xy} f(x,\varphi(x)) + \partial^2_{yy} f(x,\varphi(x))\varphi'(x)\big)\Big]$$

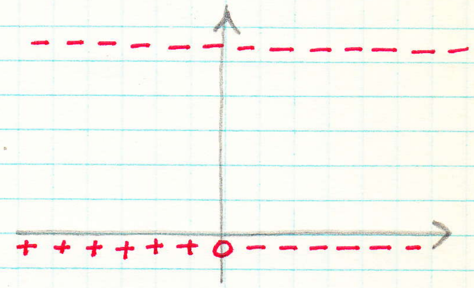
$$\times\ \partial_y f(x,\varphi(x))^{-2}$$

**Es.** Studiare eventuali funzioni $y=\varphi(x)$ definite implicitamente da

$$f(x,y) = x\log y - y e^{x} = 0 \qquad \text{in } \quad \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$$

Osserviamo che

$$\lim_{y\to 0^+} f(x,y) = \begin{cases} +\infty & \text{se } x<0 \\ 0 & \text{se } x=0 \\ -\infty & \text{se } x>0 \end{cases}$$

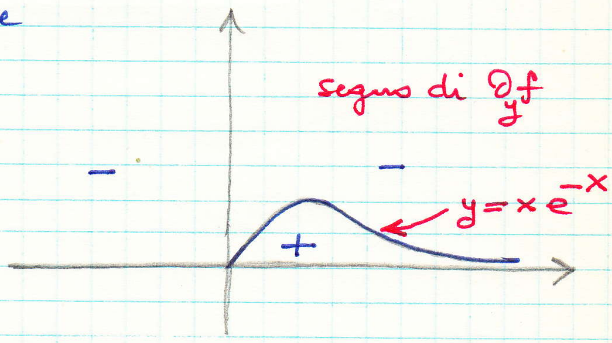


$$\lim_{y\to +\infty} f(x,y) = \begin{cases} -\infty & \text{se } x\leq 0 \\ -\infty & \text{se } x>0 \end{cases}$$

Inoltre

$$\partial_y f(x,y) = \frac{x}{y} - e^{x}$$

e quindi il segno di $\partial_y f$ in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ è indicato in figura. L'eq. $f=0$ definisce un'unica funzione $y=\varphi(x)$ in $x<0$. Poiché




$$f(x, xe^{-x}) = x(\log x - x - 1) < 0 \quad \forall x>0$$

per ogni $x>0$ la funzione $y \mapsto f(x,y)$ è sempre negativa e quindi l'eq. $f(x,y)=0$ non definisce in $x>0$ alcuna funzione $y=\varphi(x)$.

Studio di $y=\varphi(x)$, $x<0$. Poiché $f(x,1) = -e^{x}<0$ abbiamo

$$0<\varphi(x)<1$$

Nella regione $\mathbb{R}^- \times (0,1)$, dove si trova il grafico di $\varphi$ abbiamo

$$\partial_x f(x,y) = \log y - y e^x < 0$$

Quindi

$$\varphi'(x) = -\frac{\partial_x f(x,\varphi(x))}{\partial_y f(x,\varphi(x))} < 0 ,$$

cioè $\varphi$ è decrescente. Possiamo allora affermare che esistono

$$\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = L \quad e \quad \lim_{x \to 0^-} \varphi(x) = \ell$$

e che $1 \geq L > \ell \geq 0$ (perché $0 < \varphi(x) < 1$).

Allora

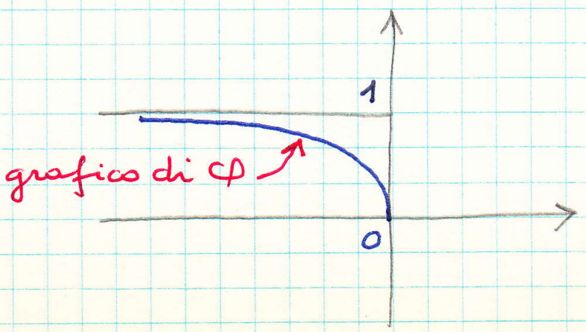
$$0 = \lim_{x \to -\infty} f(x,\varphi(x)) = \lim_{x \to -\infty} x \log \varphi(x)$$

che forza $L = 1$. Analogamente

$$0 = \lim_{x \to 0^-} f(x,\varphi(x)) = \lim_{x \to 0^-} x \log \varphi(x) - \ell$$

Se fosse $\ell > 0$ avremmo $\lim_{x \to 0^-} x \log \varphi(x) = 0$ e perverremmo all'assurdo $0 = -\ell$. Quindi deve essere $\ell = 0$.

Si può dimostrare che $\varphi'(x) \sim \frac{1}{x}$ per $x \to 0^-$



CALCOLO DIFFERENZIALE

# LEZIONE 9

**Teorema** (di esistenza e unicità in piccolo) $I, J$ intervalli aperti di $\mathbb{R}$, $f: I \times J \to \mathbb{R}$ continua. Sia $(x_0, y_0) \in I \times J$ t.c.

IP1) $f(x_0, y_0) = 0$

IP2) $\partial_y f$ esiste continua in un intorno di $(x_0, y_0)$ e

$$\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0.$$

Allora esistono un intorno $I'$ di $x_0$ e un'unica f.ne $\varphi: I' \to \mathbb{R}$ t.c.

(i) $\varphi(x_0) = y_0$

(ii) $(x, \varphi(x)) \in I' \times J$ per ogni $x \in I'$

(iii) $f(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in I'$

Inoltre $\varphi \in \mathscr{C}(I')$.

**Dim.** Supponiamo, ad esempio, che $\partial_y f(x_0, y_0) > 0$. Poiché $\partial_y f$ è continua in $(x_0, y_0)$, esiste un intorno $I_0 \times J_0$ di $(x_0, y_0)$ in cui $\partial_y f$ è positiva. Sia $J_0 = (y_0 - 2\varepsilon, y_0 + 2\varepsilon)$. Abbiamo

$$f(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0 \quad \text{e} \quad f(x_0, y_0 + \varepsilon) > 0$$

(poiché $f(x_0, y_0) = 0$ e $\partial_y f(x_0, y) > 0 \quad \forall y \in [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$).

Essendo $f$ continua nei punti $(x_0, y_0-\varepsilon)$ e $(x_0, y_0+\varepsilon)$, esiste un intorno $I'$ di $x_0$, contenuto in $I_0$ tale che

$$f(x, y_0-\varepsilon) < 0 \quad \text{e} \quad f(x, y_0+\varepsilon) > 0 \qquad \forall x \in I'.$$

In $I' \times (y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$ sono soddisfatte le ipotesi del teorema di esistenza e unicità in grande. La tesi segue direttamente. $\square$

Oss. Se $f$ è diff.le (risp. di classe $\mathcal{C}^{(1)}$) in $I \times J$, la funzione $\varphi$ è diff.le (risp. di classe $\mathcal{C}^{(1)}$) in $I'$ e

$$\varphi'(x) = -\frac{\partial_x f(x, \varphi(x))}{\partial_y f(x, \varphi(x))} \qquad \forall x \in I'.$$

Oss. Se si rimuove l'ipotesi di continuità di $f$ in un intorno di $(x_0, y_0)$, la conclusione cessa di valere. Infatti la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

soddisfa le altre ipotesi del teorema, ma non definisce, in un intorno di $(0,0)$, alcuna funzione implicita $y = \varphi(x)$.

Oss. Se $\partial_y f(x_0, y_0) = 0$, le situazioni possibili sono molteplici. In un intorno di $(0,0)$ le funzioni

$f_1(x,y) = x^2 + y^2$, $\quad f_2(x,y) = x^2 - y^2$, $\quad f_3(x,y) = (x-y)^2$.

definiscono, risp., nessuna, quattro, una f.ne implicita continua in un intorno di $(0,0)$.